W ä r m e t r a n s p o r t

i n t u r b u l e n t b e w e g t e n M e d i e n

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor rer. nat. (Promotion A)

eingereicht bei der

Akademie der Wissenschaften der DDR

von

Karl-Otto Eschrich

geboren am 16. Dezember 1945
in Rauenstein (Thüringer Wald)

Forschungsbereich: Kosmische Physik
Institut: Zentralinstitut für Astrophysik
Termin und Ort der öffentlichen Verteidigung:

Inhalt

Seite

1. Einführung 2
2. Grundlagen 4
3. Gleichung für die mittlere Temperatur 6
4. Berechnung der turbulenzbedingten Koeffizienten 8
4.1 Einführung und Definitionen 8
4.2 Voraussetzungen über die Gleichungen für T′, ρ′ 10
4.3 Lösungen für T' und ρ' 13
4.4 Berechnung der Korrelationen 16
4.5 Darstellung von κ durch T 20
5. Spezielle Darstellungen der turbulenzbedingten Koeffizienten 23
5.1 Der Koeffizient a 25
5.2 Der Koeffizient a_{kn} 29
5.3 Der Koeffizient b 33
5.4 Der Koeffizient a_n 34
5.5 Der Koeffizient b_n 36
6. Anwendungen in der Astrophysik 37
6.1 Das Koronaproblem der Sonne 38
6.2 Die Pol-Äquator-Temperaturdifferenz der Sonnenoberfläche 40
Anhang 44
Literatur 48

1. Einführung

Die Behandlung der Wärmeleitung in Gasen ist ein schwieriges Problem. Es ist besonders kompliziert, wenn sich das Gas in turbulenter Bewegung befindet. In der Astro- und Atmosphärenphysik, auch bei Aufgaben der Technik, hat man sich damit zu befassen. In gewissen Zuständen des sich in turbulenter Bewegung befindenden Gases kann man die Behandlung der Wärmeleitung vereinfachen. Dies ist der Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Wir befassen uns mit dem Verhalten der Temperatur eines idealen Gases, das stochastischen Bewegungen und damit auch stochastischen Änderungen der Dichte unterworfen ist. Diese Bewegungen wie auch die Änderungen der Dichte werden dabei als gegeben betrachtet und im folgenden der Kürze halber als Turbulenz bezeichnet.

Die Temperatur des Gases muß ebenso wie die Bewegung und die Dichte einen stochastischen Charakter aufweisen. Wie üblich fassen wir jede solche stochastisch schwankende Größe als Überlagerung aus einem mittleren Anteil und einem schwankenden Anteil auf. Beide Anteile unterscheiden sich durch die Längen- und Zeitskalen, in denen sie sich wesentlich ändern. Zum schwankenden Anteil gehören die kleineren Skalenwerte, zum mittleren Anteil die größeren.

Wir interessieren uns in erster Linie dafür, wie die mittlere Temperatur durch die Turbulenz beeinflußt wird. Deshalb wird die Wärmeleitungsgleichung gemittelt. Der Struktur nach erhält man wieder die Ausgangsgleichung, aber mit Zusatztermen. Diese Zusatzterme sind vorerst unbekannt, bei bestimmten Voraussetzungen über die mittlere Temperatur jedoch lineare Funktionale der mittleren Temperatur und deren räumlichen und zeitlichen Ableitungen.

Setzen wir voraus, daß sich die mittlere Temperatur über gewisse Längen und Zeiten, die mit den Skalen der Turbulenz zusammenhängen, wenig ändert, dann sind die höheren Ableitungen der mittleren Temperatur unwesentlich und können vernachlässigt werden. Die linearen Funktionale der mittleren Temperatur sind mit Koeffizienten behaftet, die durch die Turbulenz bestimmt werden. Diese Koeffizienten sind jedoch schwer in einer expliziten Form darzustellen. Einen Ausweg bietet die Beschränkung darauf, daß nicht nur die mittlere Temperatur, sondern

alle mittleren Größen sich in gewissen Skalenwerten nur schwach ändern, die (mittlere und schwankende) Geschwindigkeit gewisse Beträge nicht überschreitet und damit zusammenhängend die Dichte- und Temperaturschwankungen klein gegenüber den Mittelwerten dieser Größen sind. Man betrachtet also eine Turbulenz, die nicht sehr intensiv ist. Trotzdem kann die Turbulenz einen starken Einfluß auf die Temperaturverteilung haben, d.h. die in der Gleichung für die mittlere Temperatur neu im Vergleich zur allgemeinen Wärmeleitungsgleichung auftretenden turbulenzbedingten Terme sind unter Umständen groß gegenüber den ursprünglichen, bereits ohne Turbulenz vorhandenen, Termen.

Diese Arbeit folgt in ihrer Grundkonzeption und einigen mathematischen Methoden dem Vorbild einer Gruppe von Untersuchungen anderer stochastischer oder turbulenter Vorgänge. Es sei verwiesen auf die Arbeiten zur Magnetohydrodynamik der mittleren Felder in turbulenten Medien (siehe z.B. Krause/Rädler 1971), und auf spezielle Arbeiten zur Turbulenzviskosität (Krause/Rüdiger 1974, Rüdiger 1974), zum Wärmetransport in turbulenten Flüssgkeiten (Krause 1972) und auf eine eigene Arbeit über die Dissipation turbulenter mechanischer Energie in Gasen (Eschrich 1978), deren Ergebnis ein Spezialfall des Ergebnisses dieser Arbeit ist.

2. Grundlagen

Wir gehen von der Wärmeleitungsgleichung in der allgemeinen Form

$$\varrho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}\,\mathrm{grad}\,T\right) = \mathrm{div}\left(\kappa\,\mathrm{grad}\,T\right) - L\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + S \tag{1}$$

aus und ergänzen diese durch die für ein ideales Gas geltendenZustandsgleichung

$$p = \varrho T R/\mu \tag{2a}$$

und die Beziehungen

$$L = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\varrho = p, \qquad R/\mu = c_p - c_v, \qquad \gamma = c_p/c_v . \tag{2b,c,d}$$

Wie üblich sind die mit T, ϱ, p und $\mathbf{u}$ die Temperatur, die Dichte, der Druck und die Geschwindigkeit des Gases gemeint. Weiterhin bedeuten κ die Wärmeleitfähigkeit, L die Kompressionswärme, c_p und c_v die spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen, γ das Verhältnis derselben, R die universelle Gaskonstante und μ die Molmasse. Schließlich sollen mit S alle Formen der Wärmeerzeugung, die nicht durch Kompression bedingt sind, erfaßt werden.

Wir wollen uns die Möglichkeit offenlassen, die Temperaturabhängigkeit von κ zu berücksüchtigen.*) Vorerst nehmen wir aber einfach

$$\kappa = \kappa(x,t) . \tag{3}$$

Damit wird es möglich, von (1),(2) zu einer Wärmeleitungsgleichung in der speziellen Form

$$\varrho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}\,\mathrm{grad}\,T\right) = \frac{1}{c_v}\mathrm{div}\left(\kappa\,\mathrm{grad}\,T\right) - \varrho(\gamma-1)\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\cdot T + S/c_v \tag{4}$$

überzugehen, die wir den weiteren Betrachtungen zugrunde legen. Die Größen γ, c_v, die die Eigenschaften des Gases beschreiben, und $\mathbf{u}, \varrho$, also die Größen aus der Hydrodynamik,

*) Fußnote: Aus der stat. Physik ist bekannt, daß für ein Gas $\kappa = c_v^{3/2} m\, T^{1/2}/4Q$, mit der Molekülmasse m und dem Wirkungsquerschnitt Q der Gasmoleküle, ist.

und die die Wärmequellen beschreibende Größe S, werden als gegeben betrachtet. Selbstverständlich soll bei allen Vorgängen die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0 \tag{5}$$

erfüllt sein.

Wir nehmen weiter an, daß eine Mittelung erklärt ist, die, auf eine stochastisch schwankende Größe angewandt, eine Glättung des räumlichen und zeitlichen Verlaufs bewirkt. In diesem Sinne fassen wir jede stochastisch schwankende Größe A als Summe aus einem mittleren Anteil $\overline{A}$ und einem schwankenden Anteil A' auf, setzen also $A = \overline{A} + A'$. Dabei ist es für unsere Betrachtung belanglos, wie die Mittelung im Einzelnen definiert wird. Es kommt lediglich darauf an, daß die Reynoldschen Regeln gelten, also beispielsweise

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A}\,, \quad \overline{A'} = 0\,, \tag{6a,b}$$

$$\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}} = \overline{A}\cdot\overline{B}\,, \quad \overline{\overline{A}\cdot B'} = 0\,, \tag{6c,d}$$

$$\overline{A\cdot B} = \overline{A}\cdot\overline{B} + A'\cdot B' \tag{6e}$$

und daß die Reihenfolge von Mittelung und Differentiation oder/und Mittelung und Integration vertauscht werden darf.

3. Gleichung für die mittlere Temperatur

Unser Interesse gilt in erster Linie dem Verhalten der mittleren Temperatur. Unterwirft man die Wärmeleitungsgleichung in der Form (4) einer Mittelung, so entsteht

$$\bar{\varrho}\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}}\,\mathrm{grad}\,\bar{T}\right) = \frac{1}{c_v}\,\mathrm{div}\left(\bar{\kappa}\,\mathrm{grad}\,\bar{T}\right) - (\gamma-1)\bar{\varrho}\,\bar{T}\,\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{u}} + \bar{S}/c_v + \bar{\mathbf{P}}\cdot\bar{\varrho}\,, \qquad (7)$$

mit

$$\bar{\mathbf{P}}\cdot\bar{\varrho} = \frac{1}{c_v}\,\mathrm{div}\left(\overline{\kappa'\,\mathrm{grad}\,T'}\right) - \overline{\varrho'\mathbf{u}'}\cdot\mathrm{grad}\,\bar{T} - (\gamma-1)\,\overline{\varrho'\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}'}\cdot\bar{T} - \bar{\varrho}\,\overline{\mathbf{u}'\,\mathrm{grad}\,T'} \qquad (8)$$
$$-(\gamma-1)\bar{\varrho}\,\overline{T'\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}'} - \overline{\varrho'\,\partial T'/\partial t} - (\gamma-1)\,\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{u}}\cdot\overline{\varrho' T'} - \bar{\mathbf{u}}\,\overline{\mathrm{grad}\,T'\varrho'}\,.$$

Die formale Übereinstimmung der Gleichungen (4) und (7) wird durch die Größe $\bar{\mathbf{P}}$ gestört. Während sich T aus (4) schon bestimmen läßt, wenn $\mathbf{u}$, ϱ, κ, γ und S bekannt sind, kann man $\bar{T}$ erst dann aus (7) ermitteln, wenn man neben $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\varrho}$ und $\bar{S}$ auch $\bar{\mathbf{P}}$ kennt. Um eine Aussage über die Größe $\bar{\mathbf{P}}$ zu erhalten, fragen wir nach T'. Eine Gleichung für T' erhält man, wenn in (4) $T = \bar{T} + T'$, $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$ usw. gesetzt und Gleichung (7) berücksichtigt wird. Wir rechnen linear in den schwankenden Größen, geben dafür die Voraussetzungen später an, und erhalten:

$$\bar{\varrho}\left(\frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}}\,\mathrm{grad}\,T'\right) = \frac{1}{c_v}\,\mathrm{div}\left(\bar{\kappa}\,\mathrm{grad}\,T'\right) - (\gamma-1)\bar{\varrho}\,\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{u}}\cdot T' + S'/c_v + \frac{1}{c_v}\,\mathrm{div}\left(\kappa'\,\mathrm{grad}\,\bar{T}\right)$$
$$-\varrho'\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} - \varrho'\bar{\mathbf{u}}\,\mathrm{grad}\,\bar{T} - \bar{\varrho}\,\mathbf{u}'\,\mathrm{grad}\,\bar{T} - (\gamma-1)\bar{\varrho}\,\bar{T}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}' - (\gamma-1)\varrho'\bar{T}\,\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{u}}\,. \qquad (9)$$

Wie wir später sehen werden, liegt kein Einfluß der Randbedingungen und des Anfangszustandes auf T', bei unwesentlicher Einschränkung vor. Deshalb, und aufgrund der Struktur der Gleichung (9) und wegen des lokalen Charakters turbulenter Größen, ist T' und damit auch $\bar{\mathbf{P}}$ ein lineares Funktional von $\bar{T}$. $\bar{\mathbf{P}}$ besitzt somit die Gestalt:

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{a}\bar{T} - \mathbf{a}_i\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} + \mathbf{a}_{ij}\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_i \partial x_j} + \cdots - \mathbf{b}\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \mathbf{b}_i\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_i \partial t} + \cdots + \bar{\mathbf{w}}\,. \qquad (10)$$

In $\bar{\mathbf{w}}$ ist die durch S' verursachte Wirkung zusammengefaßt, die uns in dieser Arbeit nicht weiter interessiert.

Wir greifen nun auf die Gleichung (7) zurück und setzen dort den Ausdruck (10) ein. So entsteht:

$$\bar{\varrho}\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\bar{u}_i + u_i^T}{1+b}\cdot\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\bar{\varrho}\, a_{ij} + \frac{1}{c_v} R\,\delta_{ij}}{1+b}\cdot\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}\right) + \\ + \bar{\varrho}\,\frac{a - (\gamma-1)\,\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{u}}}{1+b}\cdot\bar{T} + \bar{\varrho}\,\frac{b_i}{1+b}\cdot\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_i\,\partial t} + \frac{\bar{w} + \bar{\varrho}/c_v}{1+b}, \tag{11}$$

mit

$$u_i^T = \frac{1}{\bar{\varrho}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\varrho}\, a_{ij}\right) - \frac{a_{ij} + \delta_{ij}\,\bar{R}/\bar{\varrho} c_v}{1+b}\cdot\frac{\partial b}{\partial x_j} + a_i, \tag{12}$$

die von uns gesuchte Gleichung für die mittlere Temperatur. Bis auf b grad $\partial \bar{T}/\partial t$ haben wir hier alle höheren, in der allgemeinen Wärmeleitungsgleichung (1) oder der Wärmeleitungsgleichung in der Form (4) nicht auftretenden Terme nicht mit aufgeschrieben. Die durch a, a_i, a_{ij} und b beschriebenen Wirkungen der Turbulenz können leicht interpretiert werden, da sie lediglich Korrekturen bereits vorhandener Größen darstellen. a ist im Rahmen unserer Näherungen eine positive Größe und beschreibt einen dissipativen Effekt. Hierüber liegt bereits eine Veröffentlichung vor (Eschrich, 1978). u_i^T beschreibt einen der Konvektion analogen Wärmetransport, a_{ij} eine Änderung der Wärmeleitfähigkeit, b modifiziert die zeitliche Änderung von T und w ist eine weitere Wärmequelle.

Mit Hilfe der gemittelten Kontinuitätsgleichung erhält man die, ebenfalls in den schwankenden Größen linearisierte Gleichung

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\bar{\varrho}\,\mathbf{u}' + \varrho'\,\bar{\mathbf{u}}\right) = 0, \tag{13}$$

die bei gegebenen $\bar{\mathbf{u}}$ und $\bar{\varrho}$ einen Zusammenhang zwischen ϱ' und $\mathbf{u}'$ vermitteln. Gleichung (13) benutzen wir später um ϱ' durch u′ und als Funktional von $\bar{\varrho}$ und $\bar{\mathbf{u}}$ darzustellen.

4. Berechnung der turbulenzbedingten Koeffizienten

4.1 Einführung und Definitionen

Wir gehen nun daran, für die turbulenzbedingten Koeffizienten a, a_i, a_{ij}, b, b_i näherungsweise Darstellungen zu finden. Das bedeutet, wir müssen P und alle anderen auftretenden Korrelationen näherungsweise berechnen. Dazu bildet die Gleichung (9) für T' die Grundlage.

Es liegt nahe anzunehmen, daß T' in einem gegebenen Raum- und Zeitpunkt nur dann eine wesentliche Korrelation zu irgendeiner schwankenden Größe in anderen Punkten hat, wenn die räumlichen und zeitlichen Abstände nicht zu groß sind, etwa die durch $\mathbf{u}'$, ϱ' und S' bestimmten Korrelationslängen und -zeiten nicht wesentlich überschreiten. Dann braucht man, um $\bar{P}$ für einen gegebenen Raum- und Zeitpunkt zu ermitteln, auch $\bar{T}$ und alle anderen mittleren Größen nur in einer derart beschränkten Umgebung derselben zu kennen. Eine wesentliche Voraussetzung ist, daß sich $\bar{T}$ und alle anderen mittleren Größen in dieser Umgebung nur schwach ändern, so daß sie durch die ersten Glieder einer Taylorreihe um den gegebenen Punkt hinreichend genau dargestellt werden. Außerdem betrachten wir nur solche T', die weit genug vom Rand und der Anfangszeit entfernt sind, so daß deren Einfluß auf T' unwesentlich ist.

Lediglich um die Rechnungen zu vereinfachen, gehen wir weiterhin von zwei zusätzlichen Voraussetzungen aus, die den Gültigkeitsbereich des Ergebnisses nicht einschränken. Als erstes setzen wir die außerhalb des durch Korrelationslänge und -zeit definierten Gebietes um den gegebenen Punkt liegenden schwankenden Größen null. Zweitens legen wir den gegebenen Punkt in den Koordinatenursprung.

Bei den weiteren Rechnungen wollen wir uns der Fourier-Transformation bedienen. Dabei wird der Zusammenhang zwischen einer Funktion $A(\mathbf{x},t)$ und ihrer Fouriertransformierten $\hat{A}(\mathbf{k},\omega)$ durch

$$\hat{A}(\mathbf{k},\omega) = (2\pi)^{-4} \iint A(\mathbf{x},t) \exp(-i(\mathbf{k}\mathbf{x}-\omega t))\, d^3\mathbf{x}\, dt \tag{14}$$

festgelegt. Wir notieren die Relation

$$\hat{A}^*(\mathbf{k},\omega) = \hat{A}(-\mathbf{k},-\omega) \ . \tag{15}$$

Bei der Fouriertransformation eines Produktes aus einer mittleren Größe $\bar{A}(\mathbf{x},t)$ und einer schwankenden $B'(\mathbf{x},t)$ entwickeln wir zuerst gemäß dem oben gesagten $\bar{A}$ in eine Taylorreihe um den Punkt $\mathbf{x} = 0,\ t = 0$

$$\bar{A}(\mathbf{x},t) = A_0 + A_n x_n + \frac{1}{2} A_{kn} x_k x_n + \ldots + A_t t + \ldots + A_{nt} x_n t + \ldots \quad (16)$$

mit $A_0 = \bar{A}(0,0)$, $A_n = \frac{\partial}{\partial x_n} A \Big|_{\substack{x=0\\t=0}}$, $A_t = \frac{\partial}{\partial t} \bar{A} \Big|_{\substack{x=0\\t=0}}$ usw.

und führen dann die Transformation aus. Es ergibt sich

$$(2\pi)^{-4} \iint \bar{A}(\mathbf{x},t) B'(\mathbf{x},t)\ \exp(-i(\mathbf{kx}-\omega t))\, d^3\mathbf{x}\, dt = A_0(1+D_A)\ \hat{B}'(\mathbf{k},\omega), \quad (17)$$

mit dem Differentialoperator

$$A_0(1+D_A) = A_0 + iA_n \frac{\partial}{\partial k_n} - \frac{1}{2} A_{kn} \frac{\partial^2}{\partial k_k \partial k_n} + \ldots - iA_t \frac{\partial}{\partial \omega} + \ldots + A_{nt} \frac{\partial^2}{\partial k_n \partial \omega} \ldots \quad (18)$$

der bezüglich $\mathbf{k}$ und ω auf $\hat{B}'$ anzuwenden ist. Wäre $\bar{A}$ = const., so wäre $D_A = 0$. Steht anstelle $\bar{A}$ eine Größe $\partial A/\partial x_n$ oder $\partial A/\partial t$, dann ist der Operator D_A mit h_n bzw. h_t zu multiplizieren. Für die Operatoren h_n und h_t, den einzelnen Summanden von D_A, ist die Produktregel anzuwenden und es gilt

$$\begin{aligned} ih_n \frac{\partial}{\partial k_n} &= \delta_{kn}, \quad h_n \frac{\partial}{\partial \omega} = 0, \quad h_n F(\mathbf{k},\omega) = 0, \\ -ih_t \frac{\partial}{\partial \omega} &= 1, \quad h_t \frac{\partial}{\partial k_n} = 0, \quad h_t F(\mathbf{k},\omega) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Beispielsweise ist

$$h_i A_0(1+D_A) = A_i + iA_{ni} \frac{\partial}{\partial k_n} - iA_{it} \frac{\partial}{\partial \omega} + \ldots,$$

$$h_t A_0(1+D_A) = A_t + iA_{nt} \frac{\partial}{\partial k_n} + \ldots \quad .^{*)}$$

---

*) Fußnote: Man kann leicht die Regeln

$$i\left(k_n D_A - D_A k_n\right) = h_n D_A, \quad -i\left(\omega D_A - D_A \omega\right) = h_t D_A$$

ableiten.

4.2 Voraussetzungen über die Gleichungen für T' und ϱ'

Die Linearisierung der Gleichungen (9) und (13) in den schwankenden Größen gelingt unter der Voraussetzung

$$|\mathbf{u}'| \ll l_0 / t_0 , \tag{21}$$

wobei l_0 und t_0 die charakteristische Länge bzw. Zeit von $\mathbf{u}'$ ist. Die Lösung dieser Gleichungen (9), (13) gelingt uns jedoch nur näherungsweise. Für

$$\bar{\varrho} = \text{const.}, \quad \bar{\mathbf{u}} = 0 , \quad \bar{p} = \text{const.} \tag{22a,b,c}$$

kann man leicht exakte Lösungen angeben. Für diesen Fall folgen aus der Bedingung (21) die beiden Relationen

$$\varrho' / \bar{\varrho} \ll 1 , \quad T' / \bar{T} \ll 1 . \tag{23a,b}$$

Läßt man eine der Bedingungen (22) fallen, können wir keine Lösung angeben. Schwächt man die Bedingungen (22) aber derart ab, so daß die dadurch zusätzlich auftretenden Terme klein gegenüber einem der anderen Terme, die bei Gültigkeit von (22) auftreten, sind, können wir durch eine Störungsrechnung eine Näherungslösung finden. Die dazu notwendigen Bedingungen sind

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\partial \bar{A}}{\partial x_n}\right| \cdot l_0 \ll |\bar{A}| , \qquad \left|\frac{\partial^{i+1} \bar{A}}{\partial x_n^{i+1}}\right| \cdot l_0 \ll \left|\frac{\partial^i \bar{A}}{\partial x_n^i}\right| , \\ &\left|\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right| \cdot t_0 \ll |\bar{A}| \qquad \left|\frac{\partial^{i+1} \bar{A}}{\partial t^{i+1}}\right| \cdot t_0 \ll \left|\frac{\partial^i \bar{A}}{\partial t^i}\right| , \quad i = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{24}$$

und

$$|\bar{u}_k| \cdot |\varrho'| \ll \bar{\varrho} \, |u_k'| \tag{25}$$

oder einfacher

$$|\bar{\mathbf{u}}| \leq |\mathbf{u}'| . \tag{26}$$

Unter diesen Voraussetzungen bleiben natürlich die Ungleichungen (23) bestehen. Da wir die Lösungen der Gleichungen

(9) und (13) im Fourierraum gewinnen, müssen die Bedingungen (24), (25), (26) modifiziert werden. Es muß dann bei $A_0(1+D_A)\hat{B}'$ das jeweils folgende Glied klein gegenüber den vorangehenden Gliedern, insbesondere muß

$$|D_A\hat{B}'| \ll |B'| \tag{27}$$

sein. Die Bedingung (25) wird durch

$$|u_{k,0}| \cdot |\hat{\rho}'| \ll \rho_0 |\hat{u}_k'| \tag{28}$$

ersetzt. Es sei vermerkt, daß bei der Darstellung der in (10) auftretenden Koeffizienten a, a_i usw. die in den ~~Gleichungen~~ Ungleichungen (24) ausgedrückten Bedingungen noch schärfer gefaßt werden. Die jeweils rechts stehenden Ausdrücke werden folgendermaßen ersetzt:

$$\bar{A} \longrightarrow A', \quad \frac{\partial^i \bar{A}}{\partial x_n{}^i} \longrightarrow \frac{\partial^i A'}{\partial x_n{}^i}, \quad \frac{\partial^i \bar{A}}{\partial t^i} \longrightarrow \frac{\partial^i A'}{\partial t^i}.$$

Dies führt auf die Bedingungen

$$l_m \gg l_0, \qquad t_m \gg t_0, \tag{29}$$

wenn l_m und t_m die Anstiegslänge bzw. Anstiegszeit der mittleren Größen bezeichnet.

Wie in der Einleitung bereits erwähnt, betrachten wir die Turbulenz als gegeben und als Ursache der Dichte- und Temperaturschwankungen. Wir wollen noch die Möglichkeit der Erzeugung von Temperaturschwankungen durch stochastisch wirkende Wärmequellen, ausgedrückt durch S′, zulassen, aber nicht näher darauf eingehen. D.h., daß durch u′ die Funktion ρ' und durch u′ und S′ die Funktion T′ eindeutig bestimmt sein muß. Dies wird erreicht, indem die Lösungen der homogenen Gleichungen von (9) und (13) Null gesetzt werden. Andernfalls müßten wir verlangen, daß nach Ablauf der Korrelatioszeit die Lösung des homogenen Systems verschwindet, was auf dasselbe hinausläuft.

Die Gleichungen (9) und (13) sind also gelöst, wenn jeweils eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems angegeben wird,

die die Eigenschaft hat, mit u' bzw. u' und S' zu verschwinden.

Für die entsprechenden Gleichungen im Fourierraum gilt dies sinngemäß ebenfalls.

4.3 Lösung der Gleichungen für ϱ' und T'

Mit den in Abschnitt 4.1 eingeführten Bezeichnungen lauten die einer Fouriertransformation unterworfenen Gleichungen (9) und (13) für T' und ϱ'

$$(\lambda_0 k^2 - i\omega)\hat{T}' = -\lambda_0 k_i D_K k_i \hat{T}' + i D_\varrho \omega \hat{T}' - (1+D_\varrho)\vartheta_u \hat{T}' + \hat{a}' T_0 - k_u h_u D_T \hat{R}'/\varrho_0 c_v \tag{30}$$

und

$$\omega \hat{\varrho}' = k_u \varrho_0 (1+D_\varrho)\hat{u}_u' + k_u u_{u,0}(1+D_u)\hat{\varrho}' . \tag{31}$$

Es ist $\lambda_0 = K_0/\varrho_0 c_v$,

$$\vartheta_u = u_{u,0}\left[i(1+D_u)k_u + (\gamma-1)h_u D_u\right], \tag{32}$$

$$\hat{a}' = \hat{a}_u \hat{u}_u' + \hat{S}'/\varrho_0 c_v T_0 . \tag{33}$$

Den Ausdruck für $\hat{a}_u$ geben wir später an. Vorerst gehen wir an die Lösung der Gleichung (30) für ϱ'. Nach Voraussetzung ist der Term mit $u_{u,0} = \bar{u}_u(0,0)$ klein gegenüber den anderen Termen, so daß wir die Lösung durch eine Störungsrechnung gewinnen können. Im Falle $\bar{u}_u = 0$ ist die Lösung der Gleichung (30)

$$\frac{1}{\varrho_0}\hat{\varrho}_0' = \frac{k_u}{\omega}(1+D_\varrho)\hat{u}_u' . \tag{34}$$

Allgemein erhält man

$$\frac{1}{\varrho_0}\hat{\varrho}' = R_n \hat{u}_n' , \quad \text{mit} \quad R_n = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{k_u u_{u,0}}{\omega}(1+D_u)\right]^\nu \cdot \frac{k_u}{\omega}(1+D_\varrho) . \tag{35}$$

Nun können wir auch $\hat{a}_u$ angeben:

$$\hat{a}_u = -\left[h_t + u_{i,0}\cdot(1+D_u)h_i + (\gamma-1)(h_i u_{i,0} D_u)\right](1+D_T)R_u + - (1+D_\varrho)\left[h_u D_T + (\gamma-1)(1+D_T)ik_u\right] . \tag{36}$$

Auf ähnliche Weise wie Gleichung (30) lösen wir die Gleichung (29) für T'. Diese Aufgabe ist aufwendiger, da jetzt drei

Störungsterme, nämlich $-\lambda_0 k_i D_\kappa k_u \hat{T}'$, $iD_\varrho \omega \hat{T}'$ und $-(1+D_\varrho)\partial_u \hat{T}'$ vorhanden sind, die die Temperaturabhängigkeit von κ, die Variabilität von $\bar{\varrho}$ und ein schwaches mittleres Geschwindigkeitsfeld $\bar{u}$ berücksichtigen. Ohne diese Terme lautet die Lösung - die nullte Näherung -

$$\hat{T}'_{00} = \hat{G}\left[T_0 \hat{a}_u \hat{u}'_u + \hat{S}'/\varrho_0 c_v\right] , \quad \text{mit} \quad \hat{G} = 1/(\lambda_0 k^2 - i\omega) . \tag{37}$$

Das allgemeine Ergebnis schreiben wir in der Form

$$\hat{T}' = \left[1 + \theta\right] \hat{T}'_{00} , \tag{38}$$

wobei θ ein komplizierter Operator ist, der aus den beiden Operatoren θ_0 und θ_{00} gebildet wird: $1+\theta = (1+\theta_0)(1+\theta_{00})$. Der operator θ_{00} wird durch die Lösung $\hat{T}'_0 = \left[1+\theta_{00}\right]\hat{T}'_{00}$ der Gleichung

$$\hat{T}'_0 = \hat{T}'_{00} - T_0 k_u (h_u D_T)\hat{\kappa}'/\varrho_0 c_v \tag{39}$$

bestimmt. Wir geben ihn in Abschnitt 4.5 an. θ_0 wird zusammengesetzt aus den Operatoren θ_u, θ_ϱ, θ_u, die die Einflüsse der drei obengenannten Störungsterme im einzelnen, und den Operatoren $\theta_{\varrho\lambda}$, $\theta_{\varrho u}$, $\theta_{\lambda u}$, die die wechselweisen Einflüsse jeweils zweier Terme berücksichtigen und schließlich dem Operator $\theta_{\varrho\lambda u}$, der den wechselweisen Einfluß aller drei Terme berücksichtigt. Explizit ist

$$\begin{aligned}
\theta_0 = {} & \theta_u + \theta_\varrho + \theta_u + \\
& + \theta_{\varrho\kappa} \cdot \hat{G}\left[-\lambda_0 k_i D_\kappa k_i \theta_\varrho + iD_\varrho \omega \theta_\lambda\right) + \\
& + \theta_{\varrho u} \cdot \hat{G}\left[+iD_\varrho \omega \theta_u - i(1+D_\varrho)\partial_u D_\varrho\right) + \\
& + \theta_{\kappa u} \cdot \hat{G}\left[-\lambda_0 k_i D_\kappa k_i \theta_u - i(1+D_\varrho)\partial_u \theta_\lambda\right) + \\
& + \theta_{\kappa\varrho u} \cdot \hat{G}\Big(-\lambda_0 k_i D_\kappa k_i \theta_{\varrho u} \cdot \hat{G}\left[+iD_\varrho \omega \theta_\kappa - i(1+D_\varrho)\partial_u \theta_\varrho\right] + \\
& \qquad + iD_\varrho \omega \theta_{\lambda u} \cdot \hat{G}\left[-\lambda_0 k_i D_\kappa k_i \theta_u - i(1+D_\varrho)\partial_u \theta_\lambda\right] + \\
& \qquad - i(1+D_\varrho)\partial_u \theta_{\varrho\lambda} \cdot \hat{G}\left[-\lambda_0 k_i D_\kappa k_i \theta_\varrho + iD_\varrho \omega \theta_\lambda\right]\Big),
\end{aligned} \tag{40}$$

wobei im einzelnen folgende Beziehungen für die $\Theta_\lambda, \ldots,$ ausgedrückt durch die Operatoren D_κ, D_ϱ, ϑ_u, gelten:

$$\Theta_\kappa = \sum_{\nu=1} \left[G \lambda_0 k_i D_\kappa k_i \right] , \tag{41a}$$

$$\Theta_\varrho = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\hat{G} i D_\varrho \omega \right]^\nu , \tag{41b}$$

$$\Theta_u = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\hat{G}(-i)(1+D_\varrho)\vartheta_u \right]^\nu , \tag{41c}$$

$$\Theta_{\lambda\varrho} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\hat{G}\left[-\lambda_0 k_i D_\kappa k_i + i D_\varrho \omega \right] \right)^\nu , \tag{41d}$$

$$\Theta_{\varrho u} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\hat{G}\left[i D_\varrho \omega - i(1+D_\varrho)\vartheta_u \right] \right)^\nu , \tag{41e}$$

$$\Theta_{\kappa u} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\hat{G} - \lambda_0 k_i D_\kappa k_i - i(1+D_\varrho)\vartheta_u \right]^\nu , \tag{41f}$$

und

$$\Theta_{\lambda\varrho u} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\hat{G}\left[-\lambda_0 k_i D_\kappa k_i + i D_\varrho \omega - i(1+D_\varrho)\vartheta_u \right] \right)^\nu . \tag{41g}$$

$\hat{T}'$ ist somit prinzipiell bekannt. Im folgenden wollen wir davon ausgehen, daß S lediglich die durch Reibung erzeugte Wärme darstellt. Dann kann aber S gegenüber den anderen Termen vernachlässigt werden, da es eine quadratische Bildung in $\mathbf{u}'$ ist. $\hat{T}'$ ist daher von $\hat{u}'$ linear abhängig.

4.4 Berechnung der Korrelationen

Wir sind nun in der Lage, sämtliche in der Gleichung (7) auftretenden Korrelationen zu berechnen. Nach dem vorangegangenen genügt es, sie im Koordinatenursprung zu ~~berechnen~~ kennen. Es ist dann

$$\overline{A'(0,0)B'(0,0)} = \iint \overline{\hat{A}'(\mathbf{k},\omega)\hat{B}'(\mathbf{k},\omega)}\; d^3k\; d^3k'\, d\omega\, d\omega' , \qquad (42)$$

wie aus der Festlegung der Fouriertransformation zu entnehmen ist. Die Funktionen $\hat{A}'$ und $\hat{B}'$ werden durch $\hat{\mathbf{u}}'$ dargestellt, so daß lediglich die Korrelation $\overline{\hat{u}'(\mathbf{k},\omega)\hat{u}'_j(\mathbf{k},\omega)}$ entsteht. Diese Korrelation wollen wir durch den Spektraltensor $\hat{Q}_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{k};t,\omega)$, der mit dem Korrelationstensor

$$Q_{ij}(\mathbf{x},\xi;t,\tau) = \overline{u'_i(\mathbf{x},t)u'_j(\mathbf{x}+\xi,t+\tau)} \qquad (43)$$

über

$$\hat{Q}_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{k};t,\omega) = (2\pi)^{-4}\iint Q_{ij}(\mathbf{x},\xi;t,\tau)\cdot \exp[-i(\mathbf{k}\xi-\omega\tau)]\, d^3\xi\, d\tau \qquad (44)$$

zusammenhängt, ausdrücken. Bei Anwendung der Beziehungen (14), (43) und Entwicklung von Q_{ij} nach $\mathbf{x}$ und t um $\mathbf{x} = 0$ und $t = 0$ erhält man

$$\overline{\hat{u}'_i(\mathbf{k},\omega)\hat{u}'_j(\mathbf{k}',\omega')} = I\left(\frac{\partial}{\partial k_n},\frac{\partial}{\partial x_n};\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial \omega}\right)\left[\hat{Q}_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{k};t,\omega')\cdot\delta^3(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\,\delta(\omega+\omega')\right]\Big|_{\substack{\mathbf{x}=0\\ t=0}} \qquad (45)$$

Unter I verstehen wir den Operator

$$I = \exp i\left(\frac{\partial}{\partial k_n}\frac{\partial}{\partial x_n} - \frac{\partial}{\partial \omega}\frac{\partial}{\partial t}\right) = 1 + i\frac{\partial}{\partial k_n}\cdot\frac{\partial}{\partial x_n} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial k_n \partial k_n}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} + \cdots - i\frac{\partial}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial}{\partial t} + \cdots \qquad (46)$$

Die Gleichung (45) gilt nicht für beliebige $\hat{Q}_{ij}$. Sie gilt, wenn bei der Anwendung des Operators I auf $\hat{Q}_{ij}$ nur endlich viele Summanden von Null verschieden sind. Das ist gleichbedeutend damit, daß die Entwicklung von Q_{ij} nach $\mathbf{x}$ und t nach einer endlichen Anzahl von Gliedern abbricht. Wir vermerken

die Beziehung

$$\hat{Q}^{*}_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{k};t,\omega) = \hat{Q}_{ij}(\mathbf{x},-\mathbf{k};t,-\omega) \quad . \tag{47}$$

Für I kann aus der Exponentialdarstellung (46) auf einfache Weise eine Reihe von Relationen dargestellt werden, beispielsweise $I^{*}I = 1$. Es sei bemerkt, daß I der in den Fourierraum übertragene Verschiebungsoperator $\exp\left(\xi_n \frac{\partial}{\partial x_n} + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right)$ ist, der eine Größe bezüglich des Ortes um ξ_n und bezüglich der Zeit um τ verschiebt.

Auf diese Weise stehen unter den Integralen der Gleichung (42) δ- Funktionen. Nachdem die Ableitungen nach k'_i, k'_j, ω und ω' von den δ- Funktionen abgewälzt wurden, können beispielsweise die Integrationen über k'_i, ω' ausgeführt werden. Das hochgestellte Zeichen $^{+}$ bedeutet die Umwälzung der $\mathbf{k},\omega$ oder/und k'_i,ω' - Differentiation. Es ist beispielsweise

$$\left[\hat{B}(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial}{\partial k_i}\hat{A}(\mathbf{k},\omega)\right]^{+} = -\hat{A}(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial}{\partial k_i}\hat{B}(\mathbf{k},\omega) \quad . \tag{48}$$

Im folgenden benutzen wir für bezüglich der Differentiation nach k_i, ω, k'_i, ω' abgeschlossenen Ausdrücke geschweifte Klammern, um eine kompaktere Schreibweise zu bekommen. Es bedeuten also

$$\left\{\frac{\partial}{\partial k_i}\right\}\hat{A} = 0 \quad , \quad \left\{\frac{\partial}{\partial \omega}\right\}\hat{A} = 0 \tag{49a}$$

$$\frac{\partial}{\partial k_i}\left[\hat{A}(\mathbf{k},\omega)\left\{\hat{B}(\mathbf{k},\omega)\right\}\right] = \hat{B}(\mathbf{k},\omega)\cdot\frac{\partial}{\partial k_i}\hat{A}(\mathbf{k},\omega) \tag{49b}$$

usw.. Insbesondere gilt

$$\left\{\hat{A}(\mathbf{k},\omega)I\right\}^{+}\hat{Q}_{ij} = \left\{I^{+}\hat{A}\right\}\hat{Q}_{ij} = \left\{I^{*}\hat{A}\right\}\hat{Q}_{ij} =$$

$$= \hat{A}\cdot\hat{Q}_{ij} - i\frac{\partial\hat{A}}{\partial k_n}\frac{\partial\hat{Q}_{ij}}{\partial x_n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial k_n \partial k_n}\cdot\frac{\partial^2\hat{Q}_{ij}}{\partial x_n \partial x_n} + i\frac{\partial\hat{A}}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial\hat{Q}_{ij}}{\partial t} \ldots \tag{50a}$$

aber

$$\left\{I\hat{A}\right\}^{+}\hat{Q}_{ij} = \left\{\hat{A}I^{*}\right\}\hat{Q}_{ij} = \hat{A}\hat{Q}_{ij} \quad . \tag{50b}$$

Diese Beispiele mögen die Vereinbarungen verdeutlichen.

Wir wollen festlegen, daß bei I die Differentiation nach x_i und t stets auf $\hat{Q}_{ij}$ wirkt und an der Stelle $x_i = 0$, $t = 0$ auszuführen ist.

Wir geben jetzt eine Liste der benötigten Korrelationen an.

1. $\overline{\varrho' u_j'} = \varrho_0 \iint \{R_i I\}^+ \hat{Q}^*_{ij} \, d^3k \, d\omega = \varrho_0 \iint R_i I \hat{Q}^*_{ij} \, d^3k \, d\omega$,

2. $\overline{\varrho' \partial u_u'/\partial x_u} = \varrho_0 \iint \{R_i I\}^+ (-ik_j) \hat{Q}^*_{ij} \, d^3k \, d\omega = \varrho_0 \iint R_i I (-ik_j) \hat{Q}^*_{ij} \, d^3k d\omega$,

3. $\overline{T' u_j'} = T_0 \iint \{(1+\theta)\hat{G}\hat{a}_i I\}^+ \hat{Q}^*_{ij} \, d^3k \, d\omega = T_0 \iint (1+\theta)\hat{G}\hat{a}_i I \, \hat{Q}^*_{ij} \, d^3k \, d\omega$,

4. $\overline{T' u_u'/\partial x_u} = T_0 \iint \{(1+\theta)\hat{G}\hat{a}_i I\}^+ (-ik_j) \hat{Q}^*_{ij} \, d^3k \, d\omega =$

$$= T_0 \iint (1+\theta)\hat{G}\hat{a}_i I (-ik_j) \hat{Q}^*_{ij} \, d^3k \, d\omega ,$$

5. $\overline{\partial T'/\partial x_u u_u'} = T_0 \iint \{ik_j (1+\theta)\hat{G}\hat{a}_i I\}^+ \hat{Q}^*_{ij} \, d^3k \, d\omega =$

$$= T_0 \iint ik_j (1+\theta)\hat{G}\hat{a}_i I \, \hat{Q}^*_{ij} \, d^3k \, d\omega ,$$

6. $\overline{T' \varrho'} = \varrho_0 T_0 \iint \{(1+\theta)\hat{G}\hat{a}_i I\}^+ \{R_j\}^{+*} \hat{Q}^*_{ij} \, d^3k \, d\omega$,

7. $\overline{T' \partial \varrho'/\partial t} = \varrho_0 T_0 \iint \{(1+\theta)\hat{G}\hat{a}_i I\}^+ \{-i\omega R_j\}^{*+} \hat{Q}^*_{ij} \, d^3k \, d\omega$,

8. $\overline{\partial T'/\partial t \varrho'} = \varrho_0 T_0 \iint \{(-i\omega)(1+\theta)\hat{G}\hat{a}_i I\}^+ \{R_j^{+*}\} \hat{Q}^*_{ij} \, d^3k \, d\omega$,

9. $\overline{\partial T'\partial/\partial x_n \varrho'} = \varrho_0 T_0 \iint \{ik_n (1+\theta)\hat{G}\hat{a}_i I\}^+ \{R_j^{+*}\} \hat{Q}^*_{ij} \, d^3k \, d\omega$,

10. $\overline{T' T'} = T_0^2 \iint \{(1+\theta)\hat{G}\hat{a}_i I\}^+ \{(1+\theta)\hat{G}\hat{a}_j I\}^{+*} \hat{Q}^*_{ij} \, d^3k \, d\omega$,

11. $\overline{\varrho' \varrho'} = \varrho_0^2 \iint \{R_i I\}^+ \{R_j^{+*}\} \hat{Q}^*_{ij} \, d^3k \, d\omega$.

Im Rahmen der oben genannten Voraussetzungen liegen hier die allgemeinsten Darstellungen vor, wenn man den Koordinatenursprung verläßt. Dazu braucht man nur bei den mittleren Größen $\bar{T}$, $\bar{\varrho}$, $\bar{u}_i$, $\hat{Q}_{ij}$ und den anderen Korrelationen für x und t den gesamten Wertebereich zuzulassen.

Aus der Definition (8) und der speziellen Darstellung (10) von $\bar{P}$ können wir bei Benutzung der auftretenden Korrelationen und der Beziehung (36), wenn dort D_T ausgeschrieben wird,

die Ausdrücke a, a_i, a_{ij}, ..., b, b_i, ... explizit angeben.

$$a = \iint (\gamma-1)\{I^+R_i^+\}(ik_j)\hat{Q}^*_{ij}\, d^3k\, d\omega +$$

$$+\iint \{I^+\langle ik_i(\gamma-1)(1+D_\varrho)^+ + R_i^+(\gamma-1)h_k u_{k,0}(1+D_k)^+\rangle \hat{G}(1+\Theta)^+]\mathcal{K}_j\}\hat{Q}^*_{ij}\, d^3k\, d\omega, \tag{51a}$$

$$a_n = \iint \delta_{jn}\{I^+R_i^+\}\hat{Q}^*_{ij}\, d^3k\, d\omega +$$

$$- \iint\{[I^+\langle R_i^+(\delta_{kn}u_{k,0}(1+D_k)^+ - i(\gamma-1)\frac{\partial}{\partial k_n}h_k u_{k,0}(1+D_k)^+) +$$

$$+ (\delta_{in} + (\gamma-1)k_i\frac{\partial}{\partial k_n})(1+D_\varrho)^+\rangle \hat{G}(1+\Theta)^+]\mathcal{K}_j\}\hat{Q}^*_{ij}\, d^3k\, d\omega, \tag{51b}$$

$$a_{kn} = -\iint\{[I^+\langle R_i^+(i\frac{\partial}{\partial k_n}u_{k,0}(1+D_k)^+ + \frac{1}{2}(\gamma-1)\frac{\partial^2}{\partial k_n\partial k_k}h_i u_{i,0}(1+D_k)^+) +$$

$$+(i\delta_{ki}\frac{\partial}{\partial k_n} + \frac{1}{2}i(\gamma-1)k_i\frac{\partial^2}{\partial k_n\partial k_k})(1+D_\varrho)^+\rangle \hat{G}(1+\Theta)^+]\mathcal{K}_j\}\hat{Q}^*_{ij}\, d^3k\, d\omega, \tag{51c}$$

$$b = -\iint\{[I^+\langle R_i^+(1+i(\gamma-1)\frac{\partial}{\partial\omega}h_k u_{k,0}(1+D_k)^+) - (\gamma-1)k_i\frac{\partial}{\partial\omega}(1+D_\varrho)^+\rangle\hat{G}^*$$

$$*(1+\Theta)^+]\mathcal{K}_j\}\hat{Q}^*_{ij}\, d^3k\, d\omega, \tag{51d}$$

$$b_k = -\iint\{[I^+\langle R_i^+(i\frac{\partial}{\partial k_n} - \delta_{kn}\frac{\partial}{\partial\omega}u_{k,0}(1+D_k)^+ - (\gamma-1)\frac{\partial^2}{\partial k_n\partial\omega}h_k u_{k,0}(1+D_k)^+) +$$

$$- i(\delta_{in}\frac{\partial}{\partial\omega} + (\gamma-1)k_i\frac{\partial^2}{\partial k_n\partial\omega})(1+D_\varrho)^+\rangle \hat{G}(1+\Theta)^+]\mathcal{K}_j\}\hat{Q}^*_{ij}\, d^3k\, d\omega, \tag{51e}$$

mit

$$\mathcal{K}_j = -i(\gamma-1)\{k_j\} + ik_j + (-i\omega + u_{n,0}ik_n + (\gamma-1)\operatorname{div}\bar{u})\{R_j^{+*}\}. \tag{52}$$

Damit haben wir die im Rahmen der oben genannten Voraussetzungen allgemeinste Form des Ergebnisses gefunden.

4.6 Darstellung von κ durch T

In diesem Abschnitt wollen wir aus einer gegebenen Darstellung $\kappa(T)$ die daraus abgeleiteten Größen $\bar{\kappa}$, κ', D_κ und $\hat{\kappa}'$ durch $\bar{T}$, T', bzw. D_T und $\hat{T}'$ ausdrücken. Dazu entwickeln wir $\kappa(T)$ um $\bar{T}$ in eine Taylorreihe nach Potenzen von T'

$$\kappa(T) = \kappa(\bar{T}+T') = \kappa(T) + \frac{1}{1!}\frac{d\kappa}{dT}\Big|_{T=\bar{T}} \cdot T' + \frac{1}{2!}\frac{d^2\kappa}{dT^2}\Big|_{T=\bar{T}} \cdot T'^2 + \dots \quad (53)$$

Daraus erhält man den Mittelwert

$$\bar{\kappa}(T) = \kappa(\bar{T}) + \frac{1}{2!}\frac{d^2\kappa}{dT^2}\Big|_{T=\bar{T}} \overline{T'^2} + \dots, \quad (54)$$

wobei natürlich $\kappa(T) = \kappa(\bar{T})$ gilt. Aus den beiden Gleichungen (53), (54) erhält man für den schwankenden Anteil $\kappa'(T) = \kappa(T) - \bar{\kappa}(T)$ den Ausdruck

$$\kappa'(T) = \frac{1}{1!}\frac{d\kappa(\bar{T})}{dT}T' + \frac{1}{3!}\frac{d^3\kappa(\bar{T})}{d\bar{T}^3}T'^3 + \dots +$$
$$+ \frac{1}{2!}\frac{d^2\kappa(\bar{T})}{d\bar{T}^2}(T'^2 - \overline{T'^2}) + \dots \quad (55)$$

Bei der Lösung der Gleichung (9) beschränken wir uns auf $\bar{\kappa}(T) = \kappa(\bar{T})$. Das ist wegen unserer Näherung möglich, wie ein Blick auf Gleichung (54) erkennen läßt. In der fouriertransformierten Gleichung (30) erscheint der Operator D_κ, der durch die Operatorfunktion

$$\kappa_0 \cdot (1+D_\kappa) = \kappa(T_0(1+D_T)) \quad (56)$$

mit $\kappa_0 = \bar{\kappa}(T_0) = \kappa(T_0)$ und $T_0 = T(0,0)$ durch D_T ausgedrückt werden kann. Bei einer Darstellung der rechten Seite der Gleichung (56) durch eine Taylorreihe um T_0 nach Potenzen von $T_0 D_T$ erhält man die gesuchte Beziehung

$$\kappa_0 D_\kappa = \frac{1}{1!}\frac{d\kappa(T_0)}{dT_0}(T_0 D_T) + \frac{1}{2!}\frac{d^2\kappa(T_0)}{dT_0^2}(T_0 D_T)^2 + \dots \quad (57)$$

In dem Ausdruck (55) für $\kappa'(T)$ beschränken wir uns wiederum gemäß unserer Näherungen auf das lineare Glied in T' auf der rechten Seite. Dann ist die fouriertransformierte von $\kappa'(T)$

$$\hat{\mathcal{R}}' = \frac{d\mathcal{R}}{d\bar{T}} (T_0(1+D_T)\hat{T}' = \left[\frac{d\mathcal{R}(T_0)}{dT_0} + \frac{d^2\mathcal{R}(T_0)}{dT_0^2}(T_0 D_T) + \frac{d^3\mathcal{R}(T_0)}{2!\,dT_0^3}(T_0 D_T)^2 + \ldots\right]\hat{T}' \quad (58)$$

und die Lösung der Gleichung (39), die ebenfalls durch ein Näherungsverfahren gewonnen wird,

$$\hat{T}_0' = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[-\frac{T_0}{\rho_0 c_v}\,\hat{G}k_u(h_u D_T)k_u\frac{dK}{dT_0}\left[T_0(1+D_T)\right]\right]^{\nu}\hat{T}_{00}' = (1+\Theta_T)\,\hat{T}_{00}' . \quad (59)$$

Aus den Gleichungen (57), (58) erkennt man, daß T' bei einer Darstellung $\mathcal{R} = \mathcal{R}(T)$ ein nichtlineares Funktional von $\bar{T}$ ist. Behalten wir die Darstellung (10) für $\bar{P}$ bei, enthalten die Koeffizienten a, $a_{\mathcal{R}}$, $a_{\mathcal{R}\eta}$ usw. $\bar{T}$ in Gestalt additiver Zusatzterme, die jedoch kleiner als die Terme ohne $\bar{T}$ sind. Man kann hier leicht den Übergang zu dem Spezialfall $\mathcal{R}$ = const. vornehmen. Dann ist $\hat{T}_0' = \hat{T}_{00}'$, $D_{\mathcal{R}}$ und damit auch $\Theta_{\mathcal{R}}$ verschwinden und man erhält eine wesentlich einfachere Gleichung für T'.

Unter der Voraussetzung, daß $\mathcal{R}(T)$ eine Stammfunktion bezüglich der Veränderlichen T besitzt, kann man die Rechnungen vereinfachen. Wir bezeichnen diese, übrigens beliebige Stammfunktion von $\mathcal{R}(T)$, mit $K(T)$. Dann kann man schon in der Gleichung (1) den ersten Term auf der rechten Seite in die Form

$$\mathrm{div}\left(\mathcal{R}\,\mathrm{grad}T\right) = \Delta K(T) \quad (60)$$

bringen. Für $\bar{K}$ und K' gelten analog die Formeln (54), (55), wobei wir uns bei $\bar{K}$ auf den ersten oder die beiden ersten Terme, je nach Anwendung, und bei K' auf den ersten Term beschränken. Es ist also

$$\bar{K}(T) = K(\bar{T}) + \frac{1}{2}\frac{d\mathcal{R}(\bar{T})}{d\bar{T}}\overline{T'^2} \quad (61)$$

und

$$K'(T) = \mathcal{R}(\bar{T})\cdot T' . \quad (62)$$

Unter Berücksichtigung von (60), (61) lautet die Gleichung für die mittlere Temperatur

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial t} + \mathbf{u}\,\mathrm{grad}T\right) = \frac{1}{c_v}\Delta\bar{K}(\bar{T}) - (\gamma-1)\bar{\rho}\bar{T}\,\mathrm{div}\bar{\mathbf{u}} + \bar{S}/c_v + \bar{H}\rho , \quad (63)$$

mit

$$\bar{H}\rho = \frac{1}{2c_v}\Delta\left(\frac{dK(\bar{T})}{dT_0}\overline{T'^2}\right) - \overline{\rho'\mathbf{u}'}\,\mathrm{grad}\bar{T} - (\gamma-1)\overline{\rho'\,\mathrm{div}\mathbf{u}'}\cdot\bar{T} - \bar{\rho}\overline{\mathbf{u}'\cdot\mathrm{grad}T'} +$$

$$- (\gamma-1)\bar{\rho}\overline{T'\mathrm{div}\mathbf{u}'} - \overline{\rho'\frac{\partial T'}{\partial t}} - (\gamma-1)\mathrm{div}\bar{\mathbf{u}}\overline{\rho' T'} - \bar{\mathbf{u}}\cdot\overline{\mathrm{grad}T'\rho'} . \quad (64)$$

Dabei unterscheiden sich $\bar{H}$ und $\bar{P}$ lediglich durch den jeweils ersten Term, der bei $\bar{H}$ nichtlinear in T' ist. Dennoch wählen wir für $\bar{H}$ einen Ansatz, der formal der Darstellung (10) für $\bar{P}$ gleicht. Für T' erhält man analog (9) die Gleichung

$$\bar{\varrho}\left(\frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}}\,\mathrm{grad}\,T'\right) = \frac{\lambda}{c_v}\,\Delta(\bar{k}(\bar{T})T') - (\gamma-1)\bar{\varrho}\,\mathrm{div}\bar{\mathbf{u}}\,T' + S'/c_v +$$

$$- \varrho'\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} - \varrho'\bar{\mathbf{u}}\,\mathrm{grad}\bar{T} - \bar{\varrho}\mathbf{u}'\mathrm{grad}\bar{T} - (\gamma-1)\bar{\varrho}\bar{T}\,\mathrm{div}\mathbf{u}' - (\gamma-1)\varrho'\bar{T}\mathrm{div}\bar{\mathbf{u}}. \tag{65}$$

Ihre Fouriertransformierte ist

$$(\lambda_0 k^2 - i\omega)\,\hat{T}' = -\lambda_0 k^2 D_k \hat{T}' + iD_\varrho \omega \hat{T}' - (1+D_\varrho)\vartheta_u \hat{T}' + \hat{a}' T_0 + \tag{66}$$

und die Lösung lautet

$$\hat{T}' = (1+\Theta_1)\hat{T}'_{00}\ . \tag{67}$$

Θ_1 unterscheidet sich von Θ dadurch, daß $\lambda_0 k_i D_k k_i$ in Θ durch $\lambda_0 k^2 D_k$ in Θ_1 ersetzt ist. Der wesentliche Vorteil der Lösung (67) gegenüber der Lösung (38) ist, daß in (67) $\hat{T}'_{00}$ gegenüber $\hat{T}'_0$ in (38) steht.

5. Spezielle Darstellungen der turbulenzbedingten Koeffizienten

Unser Ergebnis (51) ist zwar ziemlich allgemein, jedoch für Anwendungen wenig brauchbar. Außerdem lassen sich in dieser Form kaum Aussagen über die Koeffizienten a, a_n, a_{kn} usw. ableiten. Betrachten wir zunächst den Fall, daß alle als Störungen behandelten Einflüsse verschwinden. Dazu müssen wir $\bar{\varrho}$ = const., κ = const., $\bar{\mathbf{u}} = 0$ setzen und homogene und stationäre Turbulenz vorgeben. Für den Korrelations- und den Spektraltensor, die nun beide nicht von **x** und t abhängen, gelten die Beziehungen

$$Q_{ij}(\xi,\tau) = Q_{ji}(-\xi,-\tau) \quad \text{bzw.} \quad \hat{Q}_{ij}(\mathbf{k},\omega) = \hat{Q}_{ji}(-\mathbf{k},-\omega) = \hat{Q}^{*}_{ji}(\mathbf{k},\omega). \tag{69a,b}$$

Für die Spektraldichte $\hat{R}(\mathbf{x},\mathbf{k};t,\omega)$ der Autokorrelationsfunktion der Dichteschwankungen

$$R(\mathbf{x},\xi;t,\tau) = \overline{\varrho'(\mathbf{x},t)\,\varrho'(\mathbf{x}+\xi,t+\tau)} \tag{70}$$

gilt in diesem einfachen Fall

$$\hat{R}(\mathbf{k},\omega) = \hat{R}^{*}(\mathbf{k},\omega) = \hat{R}(-\mathbf{k},-\omega) \tag{71}$$

und es besteht mit $\hat{Q}_{ij}$ der Zusammenhang

$$\omega^2\hat{R}(\mathbf{k},\omega) = \bar{\varrho}^2 k_i k_j \hat{Q}_{ij}(\mathbf{k},\omega)\ . \tag{72}$$

Für die Koeffizienten a, a_n usw. erhält man die Ausdrücke

$$a = (\gamma-1)^2\iint \frac{\lambda k^2\omega^2}{\lambda^2k^4+\omega^2}\cdot\frac{\hat{R}(\mathbf{k},\omega)}{\bar{\varrho}^2}\, d^3\mathbf{k}\, d\omega\ , \tag{73a}$$

$$a_n = \iint \frac{k_i}{\omega}\hat{Q}_{in}\, d^3\mathbf{k}\, d\omega + (\gamma-1)\iint i\left[\delta_{in}k_j-\delta_{jn}k_i\right]\frac{\lambda k^2}{\lambda^2k^4+\omega^2}\hat{Q}^{*}_{ij}\cdot d^3\mathbf{k}\, d\omega +$$
$$+ (\gamma-1)^2\iint 4k_n\,\lambda^2k^2\omega/(\lambda^2k^4+\omega^2)^2\cdot\frac{\omega^2\hat{R}}{\bar{\varrho}^2}\, d^3\mathbf{k}\, d\omega, \tag{73b}$$

$$a^{(s)}_{kn} = \frac{1}{2}\iint\left[\hat{Q}_{kn}+\hat{Q}^{*}_{kn}\right]\frac{\lambda k^2}{\lambda^2k^4+\omega^2}\, d^3\mathbf{k}\, d\omega + 2(\gamma-1)\iint\frac{i\omega\lambda^2k^2}{(\lambda^2k^4+\omega^2)^2}\left[k_n(\delta_{ki}k_j-\delta_{kj}k_i)+\right.$$
$$\left.+k_k(\delta_{ni}k_j-\delta_{nj}k_i)\right]\hat{Q}^{*}_{ij}\cdot d^3\mathbf{k}\, d\omega + (\gamma-1)^2\delta_{kn}\iint\frac{\lambda^2k^4-\omega^2}{(\lambda^2k^4+\omega^2)^2}\lambda\frac{\omega^2}{\bar{\varrho}^2}\cdot\hat{R}\cdot d^3\mathbf{k}\, d\omega +$$
$$- 4(\gamma-1)^2\iint\lambda^3k^2k_kk_n\frac{\lambda^2k^4-3\omega^2}{(\lambda^2k^4+\omega^2)^3}\cdot\frac{\omega^2}{\bar{\varrho}^2}\hat{R}\, d^3\mathbf{k}\, d\omega\ , \tag{73c}$$

$$b = (\gamma-1)\iint \frac{\omega^2}{\lambda^2 k^4+\omega^2}\cdot\frac{\hat{R}}{\bar{\rho}^2}\cdot d^3\mathbf{k}\, d\omega + (\gamma-1)^2\iint \frac{\lambda^2 k^4-\omega^2}{(\lambda^2 k^4+\omega^2)^2}\cdot\frac{\omega^2}{\bar{\rho}^2}\,\hat{R}\, d^3\mathbf{k}\, d\omega \quad ,(73d)$$

$$b_n = -\iint \frac{\lambda k^2}{\lambda^2 k^4+\omega^2}\cdot\frac{k_i}{\omega}\delta_{ni}\left[\hat{Q}_{ij}+\hat{Q}^*_{ij}\right] d^3\mathbf{k}\, d\omega + (\gamma-1)\iint \frac{\lambda^2 k^4-\omega^2}{(\lambda^2 k^4+\omega^2)^2}\, i k_j \delta_{ni}\left[\hat{Q}_{ji}-\hat{Q}^*_{ji}\right] d^3\mathbf{k}\, d\omega$$

$$+ (\gamma-1)^2\iint \left(\frac{\partial^2}{\partial k_n \partial\omega}\cdot\frac{1}{(\lambda k^2-i\omega)}\right) i\,\frac{\omega^2}{\bar{\rho}^2}\,\hat{R}\, d^3\mathbf{k}\, d\omega \qquad (73e)$$

(Bei a_{kn} ist der symmetrische Anteil $a^{(s)}_{kn}$ angegeben, da nur dieser interessiert). Dieses Ergebnis ist schon früher erhalten worden (Eschrich 1978).

5.1 Der Koeffizient a

Bemerkenswert ist der Koeffizient a, der nichtnegativ ist, da für die Spektraldichte $\hat{R} \geq 0$ gilt und die anderen Faktoren im Integranden (73a) positiv sind. Daß $a\bar{T}$ nichtnegativ ist, ist verständlich, denn dieser Term beschreibt die Dissipation mechanischer (turbulenter) Energie, die verursacht ist durch den Temperaturausgleich benachbarter Turbulenzelemente unterschiedlicher Dichte. Für inkompressible Materie verschwindet a, da $R = 0$ und $\hat{R} = 0$ sind. a hängt wie alle anderen Koeffizienten von der Temperaturleitfähigkeit λ ab. Für kleine λ ist

$$a = \frac{1}{\bar{\rho}^2}(\gamma-1)^2\lambda \iint k^2 \hat{R}(\mathbf{k},\omega)\cdot d^3\mathbf{k}\, d\omega \quad , \qquad \lambda t_0/l_0^2 \ll 1 \quad , \tag{74a}$$

d.h., a verschwindet linear mit λ, denn das Integral ist eine endliche Größe. Für große λ ist

$$a = \frac{1}{\bar{\rho}^2}(\gamma-1)^2 \frac{1}{\lambda}\iint \frac{\omega^2}{k^2}\, \hat{R}(\mathbf{k},\omega)\, d^3\mathbf{k}\, d\omega \; , \; \lambda t_0/l_0^2 \gg 1 \quad . \tag{74b}$$

a verschwindet also mit $1/\lambda$, wenn das Integral endlich bleibt, was der Fall für realistische Spektralfunktionen $\hat{R}$ ist.*)
Nehmen wir beispielsweise

$$R(\xi,\tau) = \overline{\rho'^2}\exp(-\xi^2/2l_0^2 - \tau^2/2t_0^2) \quad , \tag{75a}$$

so ist die zugehörige Spektraldichte

$$\hat{R}(k,\omega) = \frac{l_0^3 t_0}{4\pi^2}\overline{\rho'^2}\exp(-k^2 l_0^2/2 - \omega^2 t_0^2/2) \tag{75b}$$

und man erhält für beide Grenzfälle

---

*) Fußnote: Für die Korrelationsfunktion $R = \overline{\rho'^2}\exp(-\xi^2/2l_0^2 - |\tau|/t_0)$ und der zugehörigen Spektralfunktion $\hat{R} = 2\overline{\rho'^2}\sqrt{2\pi}\, t_0\, l_0^3 (2\pi)^{-3} \cdot \exp(-k^2 l_0^2/2)\,(1+\omega^2 t_0^2)^{-1}$ konvergiert das Integral in (74b) nicht. Man erhält als Grenzfall $a = (\gamma-1)^2 \frac{\overline{\rho'^2}}{\bar{\rho}^2}/t_0$ für $\lambda t_0/l_0^2 \gg 1$, d.h. a verschwindet nicht für große Temperaturleitfähigkeit, sondern hat einen endlichen Grenzwert. (Im anderen Grenzfall erhält man $a = 3(\gamma-1)^2 \frac{\overline{\rho'^2}}{\bar{\rho}^2}\lambda/l_0^2$).

$$a = 3(\gamma-1)^2 \frac{\overline{\rho'^2}}{\bar{\rho}^2} \lambda/l_0^2 \quad , \quad \lambda t_0/l_0^2 \ll 1 \quad , \tag{76a}$$

und

$$a = (\gamma-1)^2 \frac{\overline{\rho'^2}}{\bar{\rho}^2} l_0^2/\lambda t_0^2 \quad , \quad \lambda t_0/l_0^2 \gg 1 \quad . \tag{76b}$$

Der Maximalwert von a bezüglich λ liegt bei $\lambda t_0/l_0^2 \approx 0{,}5$ und ist

$$a_{Max} = 0{,}15(\gamma-1)^2 \frac{\overline{\rho'^2}}{\bar{\rho}^2}/t_0 \approx 0{,}3(\gamma-1)^2 \frac{\overline{\rho'^2}}{\bar{\rho}^2} \lambda/l_0^2 \approx 0{,}08(\gamma-1)^2 \frac{\overline{\rho'^2}}{\bar{\rho}^2} \cdot \frac{l_0^2}{\lambda t_0^2} \quad , \tag{77}$$

(numerischer Wert). Für andere realistische Korrelations- und Spektralfunktionen R bzw. $\hat{R}$ erhält man einen ähnlichen Funktionsverlauf. Nur die Lage und die Höhe des Maximums von a sind verschieden.

Um uns diese Abhängigkeit zu verdeutlichen, betrachten wir zwei benachbarte Turbulenzelemente, wobei wir hier vom Einfluß der Umgebung ohne Änderung des Sachverhaltes absehen können. Zu Beginn sollen in beiden Turbulenzelementen keine Abweichungen der Dichte, des Druckes und der Temperatur von ihren Mittelwerten vorhanden sein. Nach einer gewissen Zeit, etwa $t_0/2$, entsteht eine Dichteschwankung. Im Falle $\lambda t_0/l_0^2 \to 0$ entsteht zwar ein Temperaturunterschied zwischen beiden Turbulenzelementen, aber es fließt kein Wärmestrom, es ist also $dq = 0$, d.h. ein adiabatischer Prozeß. Im Verlaufe der Zeit $t_0/2$ verschwindet die Dichteschwankung wieder. Es ist wiederum $dq = 0$, also ein adiabatischer Prozeß und deshalb nimmt die Temperatur ihren Ausgangswert an. Im Mittel hat sich nichts geändert. Es wurde, von Reibung abgesehen, keine Turbulenzenergie dissipiert, es ist also $a = 0$. Nimmt $\lambda t_0/l_0^2$ endliche Werte an, fließt auf Grund des entstandenen Temperaturunterschiedes zwischen den beiden Turbulenzelementen ein Wärmestrom. In den Turbulenzelementen ist $dq \neq 0$. Ist die Dichteschwankung nach (insgesamt) der Zeit t_0 wieder verschwunden, hat die innere Energie der Turbulenzelemente zugenommen, d.h. die Temperatur ist gestiegen. Es wurde mechanische Energie dissipiert und wir erhalten $a > 0$. Im Falle $\lambda t_0/l_0^2 \to \infty$ entsteht bei zunehmenden Dichteunterschied der benachbarten Turbulenzelemente kein Temperaturunterschied, es fließt also kein Wärmestrom und es liegt wie im anderen Grenzfall ein

adiabatischer Prozeß vor, der auf $a = 0$ führt.

Wir wollen die beiden dissipativen Effekte "Wärmeausgleich" und "Reibung" vergleichen. Für den ersten, der durch $\varrho c_v a\bar{T}$ beschrieben wird, legen wir die Ergebnisse, die wir für den Spektraltensor (75b) erhalten haben, nämlich (76a), (76b) und (77) zugrunde. Der Reibungsterm ist

$$S = \frac{1}{2}\varrho\nu\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right) + \varrho\left(\zeta - \frac{2}{3}\nu\right)\left(\frac{\partial u_k'}{\partial x_k}\right)^2 , \tag{78}$$

wo ν die kinematische Viskosität und $\varrho\zeta$ die Volumenviskosität darstellen. Mit Rücksicht darauf, daß die Turbulenz als homogen angenommen, $\mathbf{u} = 0$ ist und Glieder dritter Ordnung in den schwankenden Größen vernachlässigt werden, folgt daraus

$$\bar{S} = \bar{\varrho}\left(\nu\overline{\mathrm{rot}^2\mathbf{u}'} + \left(\frac{4}{3}\nu+\zeta\right)\overline{\mathrm{div}^2\mathbf{u}'}\right) . \tag{79}$$

(w verschwindet). Für unsere Abschätzung nehmen wir für die Geschwindigkeit $\mathbf{u}'$ ein Potentialfeld, d.h. $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}' = 0$, und setzen $\lambda = \nu = \zeta$, $\overline{\varrho'^2}/\bar{\varrho}^2 = t_0^2\overline{\mathrm{div}^2\mathbf{u}'}$ (hier könnte man Anstelle t_0 die stets größere Korrelationszeit t_c einstezen) und erinnern an die für die Schallgeschwindigkeit c_s gültige Beziehung

$$c_s^2 = \gamma(\gamma-1)c_v\bar{T} . \tag{80}$$

Führen wir noch die charakteristische Zeit des Temperaturausgleichs t_λ ein, die für eine gegebene Länge l durch $\lambda = l_0^2/t_\lambda$ definiert wird, so erhält man für $V = \bar{\varrho}c_v a\bar{T}/\bar{S}$ größenordnungsmäßig die Beziehungen

$$V = 0{,}3\cdot\frac{c_s^2 t_0^2}{l_0^2} \ll 0{,}1\, c_s^2\, t_\lambda^2/l_0^2 \quad \text{für } \lambda t_0/l_0^2 = t_0/t_\lambda \ll 1, \tag{81a}$$

$$V = 1{,}5\cdot 10^{-2}\, c_s^2\, t_0^2/l_0^2 \quad \text{für } \lambda t_0/l_0^2 = t_0/t_\lambda \approx 1 , \tag{81b}$$

$$V = 0{,}1\cdot c_s^2\, t_\lambda^2/l_0^2 \ll 0{,}1\cdot c_s^2 t_0^2/l_0^2 \quad \text{für } \lambda t_0/l_0^2 = t_0/t_\lambda \gg 1. \tag{81c}$$

Daraus kann folgendes erkannt werden: Ist die Lebenszeit des Bereiches eines Turbulenzelementes, welcher im Temperaturgleichgewicht steht, groß gegenüber der Zeit, die eine Schallwelle braucht um den gleichen Bereich zu durchdringen, dann ist V groß, d.h. die Dissipation infolge Wärmeausgleich ist dann

groß gegenüber der Dissipation durch Reibung. Die Umkehrung ist ebenfalls richtig.

Daß unter bestimmten Vorausstzungen die Dissipation mechanischer Energie infolge Wärmeausgleich die Dissipation infolge Reibung wesentlich übersteigen kann, wird häufig übersehen. Bei welchen Problemen das zutrifft, bedarf eingehenderen Untersuchungen. Das kann jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit sein.

5.2 Der Koeffizient a

Als nächstes wollen wir uns den Koeffizienten a_{kn} näher ansehen. Wie bereits erwähnt, wird durch ihn eine Änderung der mittleren Wärmeleitfähigkeit ausgedrückt, wie aus der Gleichung (11) zu erkennen ist. Auf Grund des Ansatzes (10) für $\bar{P}$ ist allerdings die Zuordnung von a_{kn} zur Temperaturleitfähigkeit besser angebracht.

Ein Blick auf den Ausdruck (73c) zeigt, daß für inkompressible Materie, für die $\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \mathrm{div}\,\bar{\mathbf{u}} = \mathrm{div}\,\mathbf{u}' = 0$, $k_i \hat{u}_i = k_i \hat{\bar{u}}_i = k_i \hat{\tilde{u}}_i = 0$, $k_j \hat{Q}_{ij} = 0$ und $k_i \hat{Q}^*_{ij}(\mathbf{k},\omega) = k_i I^* \hat{Q}_{ij}(\mathbf{k},\omega) = k_i \hat{Q}_{ij}(\mathbf{k},\omega) = 0$ gilt, man das einfache Ergebnis

$$a^{(s)}_{kn} = \frac{1}{2}\iint\left[\hat{Q}_{kn} + \hat{Q}_{nk}\right]\frac{\lambda k^2}{\lambda^2 k^4 + w^2}\, d^3k\, d\omega \tag{82a}$$

erhält (in (73c) müssen alle Glieder, die $(\gamma-1)$ als Faktor haben, verschwinden, denn für inkompressible Materie gilt $\gamma = c_p/c_v = 1$). In etwas anderer Form wurde dies von Krause (Krause 1972) schon früher erhalten. $a^{(s)}_{kn}$ ist positiv definit, d.h. die durch Turbulenz hervorgerufene effektive mittlere Temperaturleitfähigkeit $\lambda^{(eff)}_{kn} = a^{(s)}_{kn} + \lambda\delta_{kn}$ ist in inkompressibler Materie stets größer als die molekulare Temperaturleitfähigkeit. Wie verläuft nun $a^{(s)}_{kn} = a^{(s)}_{kn}(\lambda)$? Dazu betrachten wir die beiden Grenzfälle $\lambda \to 0$ und $\lambda \to \infty$. Damit wir ein konvergentes Integral erhalten, setzen wir $\omega = \lambda \cdot w$ und erhalten

$$a^{(s)}_{kn}(\lambda) = \frac{1}{2}\iint\left[\hat{Q}_{kn}(\mathbf{k},\lambda w) + \hat{Q}_{nk}(\mathbf{k},\lambda w)\right]\frac{k^2}{k^4 + w^2}\, d^3k\, dw\ , \tag{82b}$$

$$a^{(s)}_{kn}(0) = \frac{\pi}{2}\int\left[\hat{Q}_{kn}(\mathbf{k},0) + \hat{Q}_{nk}(\mathbf{k},0)\right] d^3k \tag{83a}$$

und

$$\lim_{\lambda\to\infty} a^{(s)}_{kn} = 0\ . \tag{83b}$$

Im allgemeinen ist $\hat{Q}_{kn}(\mathbf{k},0) \neq 0$ und damit auch $a^{(s)}_{kn}(0) \neq 0$. Für verschwindendes λ bewirkt die Turbulenz also eine mittlere effektive Temperaturleitfähigkeit. Die kleinskaligen Wirbel "zerknittern" das mittlere Temperaturfeld und bewirken eine Diffusion desselben. Dies hat schon Prandtl (Prandtl 1956)

beschrieben und Faustformeln dafür abgeleitet. Für $\lambda \to \infty$ ist die Wirkung der turbulenten Konvektion vernachlässigbar und damit $a_{kn} \to 0$ verständlich.

Ein Blick auf den Integranden bei (82a) läßt vermuten, daß für Spektralfunktionen mit bestimmten Eigenschaften das Maximum von $a^{(s)}_{kn}(\lambda)$ nicht bei $\lambda = 0$ liegt. Dazu ist notwendig, daß $\hat{Q}_{kn}$ bezüglich ω bei $\omega \neq 0$ ein genügend großes Maximum besitzt. Wählen wir beispielsweise eine Spektralfunktion für homogene und isotrope Turbulenz (inkompressible Materie)

$$\hat{Q}_{kn}(k,\omega) = \overline{v'^2}\left(\delta_{kn} - \frac{k_k k_n}{k^2}\right)\hat{K}(k)\hat{\Omega}(\omega) \tag{84}$$

und das spezielle Frequenzspektrum

$$\hat{\Omega}(\omega) = \frac{t_c}{2\sqrt{2\pi}}\left[e^{-(\omega-\omega_0)^2 t_c^2/2} + e^{-(\omega+\omega_0)^2 t_c/2}\right], \tag{85a}$$

das zu der Zeitfunktion

$$\Omega = e^{-\tau^2/2t_c^2}\cos\omega_0\tau \tag{85b}$$

gehört (t_c können wir als Korrelationszeit und $2\pi/\omega_0$ als charakteristische Lebensdauer der Turbulenzelemente bezeichnen). $a^{(s)}_{kn}$ hat wegen (84) die Form $a^{(s)}_{kn} = \overline{v'^2}\delta_{kn}f(\lambda)$. Die ω-Integration führt mit (85a) auf Voigtfunktionen; die anschließende k-Integration bringt keinen Vorzeichenwechsel. Damit erhält man

$$\left.\frac{df}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} < 0 \quad \text{für} \quad \omega_0^2 t_c^2 < 2 \quad , \quad t_0 > \frac{\sqrt{2}}{2}\pi t_c \tag{86a}$$

$$\left.\frac{df}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} > 0 \quad \text{für} \quad \omega_0^2 t_c^2 > 2 \quad , \quad t_0 < \frac{\sqrt{2}}{2}\pi t_c \tag{86b}$$

(numerisches Ergebnis). Wählen wir eine Spektralfunktion mit dem Frequenzspektrum (85a), für es liegen die Maxima bei $\omega \neq 0$, wenn $\omega_0^2 t_c^2 > 2$ ist, so nimmt $a^{(s)}_{kn}(\lambda)$ seinen größten Wert bei $\lambda \neq 0$ an, wenn $\omega_0^2 t_0^2 > 2$ gilt.*)

Wählen wir noch

$$\hat{K}(k) = \frac{\ell_0^3}{(2\pi)^{3/2}} e^{-k^2\ell_0^2/2} \quad , \quad K(\xi) = e^{-\xi^2/2\ell_0^2} \quad , \tag{87a,b}$$

---

*) Fußnote: Ist $\hat{Q}_{ij} = \hat{Q}_{ij}(k,\omega^2)$, so ist $d\lambda^T/d\lambda|_{\lambda=0} = 2\int \partial\hat{Q}_{ij}/\partial(\omega^2)\cdot d^3k\, d\omega$, woraus leicht bestimmt werden kann, ob das Maximum von λ^T bezüglich λ bei $\lambda = 0$ (d.h., wenn $d\lambda^T/d\lambda|_{\lambda=0} \leq 0$ gilt) oder bei $\lambda \neq 0$ (d.h., wenn $d\lambda^T/d\lambda|_{\lambda=0} > 0$ ist) liegt.

so erhält man

$$a_{kn}^{(s)}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}\delta_{kn}\,\overline{v'^2}\,t_c\,e^{-\omega_0^2 t_c^2/2} . \tag{88}$$

$\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\overline{v'^2}\delta_{kn}\,t_c\,e^{-\omega_0^2 t_c^2/2}$

$t_c \to \infty \quad a_{kn}(0) = \pi\overline{v'^2}\delta(\omega_0)$

Für $t_c \to \infty$ ist $\hat{\Omega} = \frac{1}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$, $\Omega = \cos\omega_0\tau$ und $a_{kn}^{(s)}(0) = 0$, $\sim\delta(\omega_0)$
ein Ergebnis, das wir für diesen - irrealen - Grenzfall (monochromatische zeitlich periodische Wirbel)*) sofort von Gleichung (83a) hätten ablesen können. Es gilt jedoch $a_{kn}^{(s)} \neq 0$ für $\lambda \neq 0$, (λ endlich).

*) stehende Welle

Wir wenden uns nun einem etwas komplizierteren Fall zu, nämlich für $a_{kn}^{(s)}$ bei kompressibler Materie. Zusätzlich zur Homogenität der Turbulenz soll wieder Isotropie vorausgesetzt werden. Der Spektraltensor ist dann

$$\hat{Q}_{kn} = \overline{v'^2}\,\hat{A}\left(\delta_{kn} - \frac{k_k k_n}{k^2}\right) + \overline{v'^2}\,\hat{F}\cdot\frac{k_k k_n}{k^2} . \tag{89}$$

$\hat{A} = \hat{A}(\mathbf{k},\omega)$ steht für die Korrelation des Wirbelfeldes (divergenzfrei), vergl. Gleichung (84), und $\hat{F} = \hat{F}(\mathbf{k},\omega)$ für die Korrelation des Potentialfeldes (wirbelfrei). So steht von den beiden Funktionen $\hat{A}$ und $\hat{F}$ auch nur $\hat{F}$ mit $\hat{R}$ in Zusammenhang:

$$\omega^2\hat{R} = \bar{\varrho}^2 k_i k_j \hat{Q}_{ij} = \bar{\varrho}^2 k^2 \hat{F}\,\overline{v'^2}.\ ^{*)} \tag{90}$$

$\hat{A}$ und $\hat{F}$ sind reelle Funktionen von $k = |\mathbf{k}|$ und ω und wegen (69b) symmetrisch in ω. Man erhält

$$a_{kn}^{(s)} = \delta_{kn}\lambda^T = \frac{1}{3}\overline{v'^2}\delta_{kn}\iint\left\{\frac{1}{\lambda k^2 - i\omega}(2\hat{A}+\hat{F}) - \frac{1}{2}(\gamma-1)^2 k^2\hat{F}\,\times\right.$$
$$\left.\left(\frac{\partial^2}{\partial k^2}\cdot\frac{1}{\lambda k^2 - i\omega} + \frac{2}{k}\frac{\partial}{\partial k}\cdot\frac{1}{\lambda k^2 - i\omega}\right)\right\} d^3k\,d\omega . \tag{91}$$

Hier kann keine Aussage über die Definitheit von $a_{kn}^{(s)}$ und λ^T gemacht werden. Die Funktion $\hat{A}$ liefert einen positiven Beitrag zu λ^T. Der kleinste Wert für λ^T kann also für $\hat{A} = 0$ (d.h. Potentialfeld) und $\hat{F} = \frac{1}{8\pi k_0^2}\delta(k-k_0)[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]\cdot\frac{\hat{f}(k)}{\hat{f}(k_0)}$ d.h. $F = \cos\omega_0\tau\,\sin k_0\xi/k_0\xi$, erhalten werden. Er liegt bei $\lambda k_0^2/\omega_0 \approx 0{,}12$ und ist $\lambda^T_{min} = -0{,}6\overline{v'^2}/\omega_0 = -0{,}07\overline{v'^2}/\lambda k_0^2$ für $\gamma = 5/3$. Dies bedeutet, daß bestimmte Formen der Turbulenz die molekulare Temperaturleitfähigkeit im Mittel verringern kann. Kann sie auch aufgehoben oder kann die effektive mitt-

*) Fußnote: Da, wie aus (90) geschlossen werden kann, $\hat{F}(k,0)=0$ ist, erhält man bei homogener, isotroper Turbulenz für $a_{kn}^{(s)}(0)$ den gleichen Wert für kompressibles, wie für inkompressibles Medium.

lere Temperatur sogar negativ werden? Wir vergleichen λ^T mit λ

$$\lambda^T/\lambda = - 5 \cdot \overline{v'^2}\, t_c^2/l_c^2 \qquad (92)$$

und müssen feststellen, daß wegen $\overline{v'^2} \cdot t_c^2/l_c^2 \ll 1$ auch $|\lambda^T/\lambda| \ll 1$ gilt. Für realistische Spektralfunktionen ist $|\lambda^T/\lambda|$ noch kleiner, als in (91) angegeben, unter Umständen jedoch nahezu gleich. Man kann also nur hoffen, daß (92) auch gilt, wenn die Bedingung $\overline{v'^2}\, t_c^2/l_c^2 \ll 1$ schlecht erfüllt ist. Das würde bedeuten, daß durch die Wirkung der Turbulenz die molekulare Temperaturleitfähigkeit im Mittel nahezu aufgehoben werden kann.

Eine plausible Erklärung für dieses der oberflächlichen Anschauung widersprechende Ergebnis ist nicht ganz einfach und konnte vom Verfasser dieser Arbeit noch nicht gegeben werden. Eventuell müßte durch ein Experiment die Rechnung bestätigt werden. Dies müßte durch einen verhältnismäßig einfachen Versuch gelingen. Beispielsweise durch die Temperaturmessung in einem Zylinder, dessen Gasinhalt durch zwei wärmedurchlässige bewegliche Kolben in vorgegebener Weise verdichtet oder/und verdünnt werden kann.

Möglicherweise trägt dieses Ergebnis gemeinsam mit der Dissipation turbulenter Energie infolge Wärmeleitung dazu bei, ein Kardinalproblem der Sonnenphysik, nämlich die hohe Temperatur der Korona zu erklären. Dafür sind jedoch umfassendere Untersuchungen notwendig, die den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden. Dissipative Effekte in der Sonnenkorona werden von mehreren Arbeitsgruppen untersucht, beispiesweise am "Radioastronomischen Institut der Universität Bonn" und am "Max-Planck - Institut für Radioastronomie Bonn" (Butz, Hirth, Fürst, 1977).

5.3 Der Koeffizient b

Der Koeffizient b ist wenig bedeutend. Werden die beiden Integrale in (73d) zusammengefaßt, kann man leicht erkennen, daß $b \geq 0$ ist, wobei das Gleichzeichen u.a. bei inkompressibler Materie gilt. Für die Grenzwerte von λ erhält man

$$b(0) = \frac{\overline{\rho'^2}}{\bar{\rho}^2}(\gamma-1)(2-\gamma) \quad , \quad b(\infty) = 0 \quad . \tag{93a,b}$$

Bei Spektralfunktionen $\hat{R}(\mathbf{k},\omega)$ mit bestimmten Eigenschaften besitzt $b(\lambda)$ das Maximum an der Stelle $\lambda \neq 0$. Den größten Wert von $b(\lambda)$ kann man erreichen, wenn

$$\hat{R} = \overline{\rho'^2}\frac{k^2}{8\pi k_0^4}\cdot\delta(k-k_0)\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right] \tag{94}$$

gewählt wird. Es ist dann

$$b = \frac{\overline{\rho'^2}}{\bar{\rho}^2}(\gamma-1)\cdot\frac{\omega_0^2}{(\lambda^2k^4+\omega_0^2)^2}\left[\gamma\lambda^2k^4+(2-\gamma)\omega_0^2\right] \tag{95}$$

und

$$b_{max} = \frac{\overline{\rho'^2}}{\bar{\rho}^2}(\gamma-1)\frac{3\gamma^3-\gamma^2-\gamma+2}{(3\gamma^2-4\gamma+1)^2} = \frac{\overline{\rho'^2}}{\bar{\rho}^2}\begin{cases}118/96 \ , \text{ für } \gamma = 5/3 \\ 22/9 \ , \text{ für } \gamma = 4/3\end{cases} \tag{96a}$$

bei

$$\lambda^2k_0^4/\omega_0^2 = \gamma(3\gamma-4) = \begin{cases}0 \ , \text{ für } \gamma = 4/3 \\ 5/3 \ , \text{ für } \gamma = 5/3 \quad .\end{cases} \tag{96b}$$

Da nach Voraussetzung $\overline{\rho'^2}/\bar{\rho}^2 \ll 1$ ist, gilt $b \ll 1$.

5.4 Der Koeffizient a_n

Der Koeffizient a verschwindet für isotrope Turbulenz. In der Natur gibt es mehrere Ursachen der Abweichung von der Isotropie. So ist eine inhomogene Turbulenz auch anisotrop, wobei die Richtung der Anisotropie durch den Gradienten der Turbulenzintensität gegeben ist. Wir wollen eine schwach inhomogene Turbulenz voraussetzen, die die Bedingung

$$\left|\text{grad } \overline{v'^2}\right| \cdot l_\varepsilon \ll \overline{v'^2} \tag{97}$$

erfüllt und bei der es genügt, die Ortsabhängigkeit des Korrelations- und Spektraltensors durch $\overline{v'^2}$ und $W_n = \partial \overline{v'^2}/\partial x_n$, in linearer Abhängigkeit, darzustellen. Hierzu hat Rädler (Rädler 1973) einige Bedingungen angegeben. Wir erhalten für den Spektraltensor, wenn (47) und die Relation

$$\hat{Q}_{ji}(\mathbf{x},\mathbf{k};t,\omega) = I \cdot \hat{Q}^*_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{k};t,\omega) \quad , \tag{98}$$

die aus der Definition des Korrelationstensors folgt, berücksichtigt werden

$$\begin{aligned}\hat{Q}_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{k};t,\omega) = {} & V\hat{A}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) + (W_k k_k)\left[\left(\hat{D} + \frac{i}{2k}\hat{A}'\right)\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) - i\hat{A}\frac{k_i k_j}{k^4}\right] \\ & - iW_j k_i \hat{A}/k^2 + \\ & + V\hat{F}\frac{k_i k_j}{k^2} + (W_k k_k)\left[\hat{H} + \frac{ik}{2}(\hat{F}/k^2)'\right]\frac{k_i k_j}{k^2} + iW_j k_i \hat{F}/k^2 + \\ & + W_j k_i\left[\hat{K}_1 - i\hat{K}_2\right] + W_i k_j\left[\hat{K}_1 + i\hat{K}_2\right] \quad .\end{aligned} \tag{99}$$

Die Funktionen $\hat{A}$, $\hat{D}$, $\hat{F}$, $\hat{H}$, $\hat{K}_1$ und $\hat{K}_2$ hängen von $k = |\mathbf{k}|$ und ω ab. ' bedeutet die Ableitung nach k. $\hat{A}$ (symmetrisch in ω) und $\hat{D}$ (antisymmetrisch in ω) beschreiben die Korrelationen des Wirbelfeldes, $\hat{F}$ (symmetrisch in ω) und $\hat{H}$ (antisymmetrisch in ω) beschreiben die Korrelationen des Potentialfeldes und $\hat{K}_1$ (antisymmetrisch in ω), $\hat{K}_2$ (symmetrisch in ω) beschreiben die Korrelationen des Wirbelfeldes mit dem Potentialfeld. Da der Ausdruck (73b), der übrigens für inkompressible Materie $a_n = 0$ ergibt, nur für homogene Turbulenz gilt, ist

er für den Spektraltensor (99) nicht anwendbar. Deshalb müssen wir auf (51b) zurückgreifen. Nach einer etwas längeren Rechnung erhält man

$$a_n = \frac{1}{3} W_n \iint \frac{k^2}{\omega} \left[\hat{H}+4\hat{K}_1\right] d^3\mathbf{k}\, d\omega - \frac{1}{3} W_n \iint \Big\{ \hat{G}(2\hat{A}+\hat{F}) - (\gamma-1)^2 \cdot (\hat{G}'/k)'/k \cdot \hat{F}k^4 -$$

$$- (\gamma-1)^2 \hat{G}'/k \cdot 4\hat{F}k^2 + (\gamma-1) \cdot \hat{G}'/k\, \hat{F}k^2 +$$

$$+ (\gamma-1)\hat{G}\left[3\hat{F}-4\hat{K}_2\right] \Big\} d^3\mathbf{k}\, d\omega \quad . \tag{100a}$$

Bei a, $a_{nn}^{(s)}$ und b erhalten wir keine Änderung. Mit den Spektralfunktionen $\hat{A}$ und $\hat{F}$ lauten diese Koeffizienten

$$a = (\gamma-1)^2 V \iint \frac{\lambda k^4}{\lambda^2 k^4 + \omega^2} \hat{F}\, d^3\mathbf{k}\, d\omega \ , \tag{100b}$$

$$a_{nn} = \frac{1}{3} V \delta_{nn} \iint \Big\{ \hat{G}(2\hat{A}+\hat{F}) - \frac{1}{2}(\gamma-1)^2 \left[3\hat{G}'/k + 2k^2 (\hat{G}'/k)'/k \right] \hat{F}k^2 \Big\} d^3\mathbf{k}\, d\omega \ , \tag{100c}$$

$$b = (\gamma-1)^2 V \iint \frac{\lambda^2 k^4 - \omega^2}{(\lambda^2 k^4 + \omega^2)^2} \hat{F}k^2 d^3\mathbf{k}\, d\omega + (\gamma-1) V \iint \frac{k^2 \hat{F}}{\lambda^2 k^4 + \omega^2} d^3\mathbf{k}\, d\omega \ . \tag{100d}$$

Da $\bar{\rho}$ = const. vorausgesetzt wurde, erhält man für u_n^T, siehe Gleichung (12),

$$u_n^T = a_n + \frac{\partial a_{kn}}{\partial x_k} - \frac{a_{kn} + \delta_{kn} \bar{K}/\bar{\rho} c_v}{1+b} \cdot \frac{\partial b}{\partial x_k} =$$

$$= \frac{1}{3} W_n \Big\{ \iint \frac{k^2}{\omega} (\hat{H}+4\hat{K}_1) d^3\mathbf{k}\, d\omega + (\gamma-1) \iint \Big[\left(\frac{5}{2}(\gamma-1)-1\right) \hat{G}'/k \cdot \hat{F}k^2 -$$

$$- \hat{G}(3\hat{F}-4\hat{K}_2) \ d^3\mathbf{k}\, d\omega \ -$$

$$- \frac{+V \iint \Big\{ \hat{G}(2\hat{A}+\hat{F}) - \frac{1}{2}(\gamma-1)^2 \left[3\hat{G}'/k + 2k^2 (\hat{G}'/k)'/k \cdot \hat{F}k^2 d^3\mathbf{k}\, d\omega + \frac{3\bar{K}}{\bar{\rho} c_v} \right.}{1 + (\gamma-1)^2 V \iint \frac{\lambda^2 k^4 - \omega^2}{(\lambda^2 k^4 + \omega^2)^2} \hat{F}k^2 d^3\mathbf{k}\, d\omega + (\gamma-1) V \iint \frac{k^2 \hat{F}}{\lambda^2 k^4 + \omega^2} d^3\mathbf{k}\, d\omega} \cdot$$

$$\cdot \left[(\gamma-1)^2 \iint \frac{\lambda^2 k^4 - \omega^2}{(\lambda^2 k^4 + \omega^2)^2} \hat{F}k^2 d^3\mathbf{k}\, d\omega + (\gamma-1) \iint \frac{k^2 \hat{F}}{\lambda^2 k^4 + \omega^2} d^3\mathbf{k}\, d\omega \right] \Big\} . \tag{101}$$

Für $\hat{H} = \hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 0$ ist u_n^T antiparallel zu W_n. Es ist zu erwarten, daß dieses Ergebnis für nahezu alle auftretenden Formen der Turbulenz gilt. Eine besondere Eigenschaft von u_n^T gegenüber $\bar{u}_n$ ist die, daß u_n^T keiner Kontinuitätsgleichung genügen muß. Für reine Wirbelfelder verschwindet u_n^T.

5.5 Der Koeffizient b_n

Der Term mit b_n in der Gleichung für $\bar{T}$ ist auf Grund unserer Voraussetzungen klein gegenüber den anderen Termen. Da er aber interessante Wirkungen der Turbulenz auf $\bar{T}$ beschreibt, soll er wenigstens kurz besprochen werden. Wählen wir den Spektraltensor (99) für schwach inhomogene Turbulenz, so erhält man

$$
\begin{aligned}
b_n = \frac{1}{3} W_n \iint \Big\{ & \hat{G}\frac{k^2}{\omega}\Big[\hat{H} - \frac{i}{2k}\hat{F}' + 4\hat{K}_1 - 2i\hat{K}_2\Big] + i(\gamma-1)\hat{G}\Big[3\hat{F} - 4k^2\hat{K}_2\Big] + i\hat{G}\Big[2\hat{A} + \hat{F}\Big] + \\
& + \hat{G}'/k \cdot \frac{k^2}{\omega}\Big[(\gamma-1)k^2\hat{H} + 2(\gamma-1)k^2\hat{K}_1 - (\gamma-1)\frac{ik}{2}\hat{F}' - i\hat{F}(4\gamma-3)\Big] + \\
& + (\gamma-1)\hat{G}'/k \cdot k^2\Big[(\gamma-1)k^2\hat{H} + 2(\gamma-1)k^2\hat{K}_1 - (\gamma-1)\frac{ik}{2}\hat{F}' + i\hat{F}(5-4\gamma)\Big] + \\
& - i(\gamma-1)^2 (\hat{G}'/k)'/k \cdot k^4\hat{F} - i(\gamma-1)(\hat{G}'/k)'/k \cdot \frac{1}{\omega}k^4\hat{F}\Big\}\, d^3\mathbf{k}\, d\omega \,.
\end{aligned}
\tag{101a}
$$

Dieser Ausdruck ist noch recht unübersichtlich. Für ein reines Wirbelfeld ($\hat{H} = \hat{F} = \hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 0$) bekommt man den einfachen Ausdruck

$$
b_n = \frac{2}{3} W_n \iint \frac{\omega^2 - \lambda^2 k^4}{(\lambda^2 k^4 + \omega^2)^2}\, \hat{A}\, d^3\mathbf{k}\, d\omega \,, \tag{101b}
$$

wobei der Wert des Integrales sowohl positiv als auch negativ sein kann. Wählen wir $\hat{A}(k,\omega) = \hat{K}(k)\hat{\Omega}(\omega)$, so können wir hier einige Ergebnisse des Abschnittes 5.2 verwenden. Wir nehmen für $\hat{\Omega}$ wieder die Funktion (85a) und stellen fest, daß für $\omega_0^2 t_c^2 > 2$ der Koeffizient b_n parallel, aber für $\omega_0^2 t_c^2 < 2$ antiparallel zu W_n ist.

6. Anwendungen in der Astrophysik

Nachdem, was hier unter Turbulenz verstanden wird, existiert sie in nahezu allen Objekten der Astrophysik. In Sternen und Sternatmosphären, in Galaxien und interplanetaren Nebeln und letzlich in und auf Planeten. Die hier abgeleiteten Ergebnisse können dann angewandt werden, sobald genügend Beobachtungsmaterial vorhanden und die angegebenen Voraussetzungen erfüllt sind. G. Rüdiger hat mich in diesem Zusammenhang auf das Koronaproblem der Sonne und das Problem der Temperaturdifferenz zwischen den Polen und dem Äquator der Sonne aufmerksam gemacht. Zu beiden möchte ich einige Abschätzungen bringen.

6.1 Das Koronaproblem der Sonne

Das Problem der Sonnenkorona besteht darin, deren hohe Temperatur zu erklären. In den mir bekannten Veröffentlichungen liegen entweder Differenzen zwischen berechneten und beobachteten Werten oder es liegen passend gemachte "phänomenologische Funktionen" vor. Zum ersten Fall sei Unsöld (Unsöld, 1960) zitiert. Er betrachtet ein leicht überschaubares Wärmeleitungsproblem. Im Temperaturmaximum der Korona wird die aus der Chromosphäre eintretende turbulente mechanische Energie dissipiert, also in Wärme umgewandelt. Durch Wärmeleitung fließt ein Teil dieser Energie in den äußeren Bereich der Korona, etwa 3%, und wird schließlich durch den Sonnenwind weggefegt. Der andere Teil, 97%, fließt in die Chromosphäre zurück. Die Abstrahlung ist sehr gering, so daß sie vernachlässigt wird. Für die Wärmeleitfähigkeit wird die aus der Plasmaphysik bekannte Beziehung $\mathcal{K} = 0{,}8 \cdot 10^{-6}\, T^{5/2}$ (erg/cm²s) verwendet. Die Wirkung der Turbulenz wird hier nicht beachtet. Um den Maximalwert der Temperatur von $2 \cdot 10^6$K zu erhalten, wird ein mechanischer Energiestrom von $\mathcal{F}/4\pi r^2 \approx 2 \cdot 10^6$ (erg/cm²s) benötigt. Aus den Beobachtungen werden aber nur $\mathcal{F}/4\pi r^2 \approx 10^5$ (erg/cm²s) abgeleitet. Ein um 95% verminderter Wert der Wärmeleitfähigkeit würde den richtigen des Energiestromes liefern. Das trifft auch für die Temperaturleitfähigkeit zu. Es müßte also $\lambda^{(eff)}/\lambda = (\lambda^T + \lambda)/\lambda = 1/20$ oder $\lambda^T/\lambda = -19/20$ bei $\lambda t_0/l_0^2 \approx 0{,}02$ sein, wenn man davon ausgeht, daß das turbulente Geschwindigkeitsfeld ein Potentialfeld ist. Wir müssen demzufolge fragen, ob $\lambda t_0/l_0^2 \approx 0{,}02$ realisiert ist. In der Korona ist bei $T = 10^6$K und $\varrho = 10^{-18}$, $c_v = R/(\gamma-1) \approx \frac{3}{2} \cdot 10^{12}$, ($\gamma = 1+2/3$) (cgs) $\lambda = \mathcal{K}/\varrho c_v = 5 \cdot 10^{14}$ cm²/s. Mit $t_0 = 300$ s und $l_0 = 4 \cdot 10^8$ cm erhält man $\lambda t_0/l_0^2 \approx 1$. Am Fuß der Korona, in der Chromosphäre, ist bei $T = 6 \cdot 10^3$K, $\varrho = 10^{-15}$, $c_v = \frac{3}{2} \cdot 10^{11}$ ($\gamma = 1+2/3$), $\lambda = 5 \cdot 10^7$ cm²/s. Mit denselben Werten für t_0 und l_0 erhält man $\lambda t_0/l_0^2 \approx 10^{-6}$. In einer zwischen diesen beiden Grenzen liegenden Höhe ist der gesuchte Wert sicherlich realisiert. Damit wird der Wärmestrom genügend gedrosselt, so daß er den "beobachteten" mechanischen Energiestrom die Waage hält.

Für die Dissipation der mechanischen Energie wird in der

gleichen Arbeit die für Stoßwellen gültige Beziehung $E_J = \varrho v'^3/H_0$ verwendet. Mit den Werten $\varrho = 10^{-18}$, $v' = 2\cdot 10^6$, $H_0 = 10^8$ (cgs), ist $E_J = 8\cdot 10^{-8}$ (erg/cm²s). Wir erhalten $\bar{\varrho} c_v a \bar{T} = 4\cdot 10^{-6}$ (erg/cm²s) für $t_0 = 300$ sec und $\overline{\varrho'^2}/\bar{\varrho}^2 = 10^{-2}$, wobei wegen $\lambda t_0/l_0^2 \approx 1$ die Gleichung (77) verwendet wurde. Dieser Wert ist günstiger als der Wert, den Unsöld verwendet. Für die Dissipation durch Reibung erhalten wir mit den bereits verwendeten Zahlen (bei $T=10^6$K) $\bar{S} = 2{,}5\cdot 10^{-9}$ (erg/cm²s), also $V = \bar{\varrho} c_v a \bar{T}/\bar{S} = 1{,}6\cdot 10^3$. Es scheint, als ob mit dem Ergebnis der vorliegenden Arbeit die Diskrepanz des Unsöldschen Koronamodells beseitigt werden kann.

Für eine Reihe kompliziertere Modelle sei das von Chiuderi et al. (Chiuderi, Riani, 1973) erwähnt. Im Gegensatz zu dem besprochenen Modell von Unsöld wird hier der Sonnenwind in den Rechnungen berücksichtigt. Als Ausgangsgleichungen werden die Impulsgleichungen (Navier-Stokes-Gleichung), die Kontinuitätsgleichung, die Zustandsgleichung des idealen Gases und die phänomenologische Gleichung

$$N^2 = \alpha \frac{T^{3/2}}{(T-T_0)} \cdot \frac{dT}{dh} \tag{102}$$

benutzt. N ist die Elektronenzahldichte, $T_0 = 6\cdot 10^3$K (Chromosphärentemperatur), h die Höhe und $\alpha = 6{,}25\cdot 10^{11}$ (cgs). So gut die numerischen Ergebnisse von Chiuderi sind, so wenig ist die Gleichung (102) verstanden. Diese Gleichung muß eine Beziehung zu einer Energiegleichung, genauer zur Wärmeleitungsgleichung, haben. Ein Zusammenhang mit unserer Gleichung für die mittlere Temperatur konnte jedoch noch nicht gefunden werden.

2. Grundlagen

Wir gehen von der Wärmeleitungsgleichung in der allgemeinen Form

$$\varrho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}\,\mathrm{grad}\,T\right) = \mathrm{div}\left(\kappa\,\mathrm{grad}\,T\right) - L\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + S \tag{1}$$

aus und ergänzen diese durch die für ein ideales Gas geltendenZustandsgleichung

$$p = \varrho T R/\mu \tag{2a}$$

und die Beziehungen

$$L = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\varrho = p, \qquad R/\mu = c_p - c_v, \qquad \gamma = c_p/c_v . \tag{2b,c,d}$$

Wie üblich sind die mit T, ϱ, p und $\mathbf{u}$ die Temperatur, die Dichte, der Druck und die Geschwindigkeit des Gases gemeint. Weiterhin bedeuten κ die Wärmeleitfähigkeit, L die Kompressionswärme, c_p und c_v die spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen, γ das Verhältnis derselben, R die universelle Gaskonstante und μ die Molmasse. Schließlich sollen mit S alle Formen der Wärmeerzeugung, die nicht durch Kompression bedingt sind, erfaßt werden.

Wir wollen uns die Möglichkeit offenlassen, die Temperaturabhängigkeit von κ zu berücksüchtigen.*) Vorerst nehmen wir aber einfach

$$\kappa = \kappa(x,t) . \tag{3}$$

Damit wird es möglich, von (1),(2) zu einer Wärmeleitungsgleichung in der speziellen Form

$$\varrho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}\,\mathrm{grad}\,T\right) = \frac{1}{c_v}\mathrm{div}\left(\kappa\,\mathrm{grad}\,T\right) - \varrho(\gamma-1)\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\cdot T + S/c_v \tag{4}$$

überzugehen, die wir den weiteren Betrachtungen zugrunde legen. Die Größen γ, c_v, die die Eigenschaften des Gases beschreiben, und $\mathbf{u}, \varrho$, also die Größen aus der Hydrodynamik,

*) Fußnote: Aus der stat. Physik ist bekannt, daß für ein Gas $\kappa = c_v^{3/2} m\, T^{1/2}/4Q$, mit der Molekülmasse m und dem Wirkungsquerschnitt Q der Gasmoleküle, ist.

6.2 Die Pol-Äquator-Temperaturdifferenz der Sonnenoberfläche

Die Konvektionszone der Sonne befindet sich in turbulenter Bewegung. Die charakteristischen Werte der Turbulenz sind $l_0 = 100$ km, $v' = 1{,}7$ km/s, $t_0 = 1$ min, $T' = 10^3$ K ($T = 6800$ K) und daraus folgend $\varrho'/\bar{\varrho} = T'/T(\gamma-1) = 0{,}22$, ($\gamma = 1+2/3$), $v' t_0/l_0 \approx 1$ (vergl. Unsöld, 1955, S. 218 ff). Ein wichtiges Charakteristikum ist die Zahl $\lambda t_0/l_0^2$, die bei der für die Konvektionszone der Sonne abgeleiteten Temperaturleitfähigkeit $\lambda = 5 \cdot 10^3$ cm^2/s den sehr kleinen Wert $3{,}2 \cdot 10^{-9}$ ergibt. Man kann also mit sehr guter Näherung den Grenzwert $a_{kn}^{(s)}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{3} \overline{v'^2}\, t_c \delta_{kn} = \delta_{kn} \cdot 10^{12}$ cm^2/s verwenden. Ein Vergleich mit λ zeigt, daß die Wärmeleitung keine Rolle spielt. Da der Strahlungstransport im Vergleich zum konvektiven Energietransport ebenfalls vernachlässigbar ist, wird letztlich der Energietransport durch die Turbulenz und deren Eigenschaften bestimmt. Aus Beobachtungsdaten wird eine unterschiedliche Turbulenzintensität, abhängig von der heliografischen Breite, abgeleitet. Falciani et al. (Falciani, Rigutti, Roberti, 1974) erhalten einen Unterschied von $6\% \pm 13\%$ zwischen Äquator und 72° heliografischer Breite. Erstaunlicherweise wird aber keine Breitenabhängigkeit der Oberflächentemperatur ($0 \pm 0{,}6\%$) zwischen Äquator und 72° hel. Breite) festgestellt. Rüdiger hat Spektraltensoren für Turbulenz auf rotierenden Körpern (inkompressible Materie) berechnet. In erster Näherung erhält er aus der Gleichung (82a)

$$a_{kn} = \lambda_\varrho (\delta_{kn} + q_{kn}(\cos\vartheta)) , \tag{103}$$

mit

$$q_{kn} = \begin{pmatrix} q_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & q_{\vartheta\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & q_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} , \tag{104}$$

$$q_{rr} = q_r^{(1)} + q_r^{(2)}(1-\cos^2\vartheta) , \quad q_{\vartheta\vartheta} = q_\vartheta^{(1)} + q_\vartheta^{(2)}(1-\cos^2\vartheta) , \tag{105}$$

$$q_r^{(2)} \ll 1 , \quad q_\vartheta^{(2)} \ll 1 , \tag{106}$$

(priv. Mitteilung). λ_ϱ, $q_r^{(1)}$, $q_r^{(2)}$, $q_\vartheta^{(1)}$, $q_\vartheta^{(2)}$ sind Konstanten.

Um einen eventuell möglichen Temperaturunterschied zwischen dem Äquator und den Polen der Sonnenoberfläche größenordnungsmäßig zu bestimmen, wählen wir ein einfaches Modell. Wir lösen ein stationäres rotationssymmetrisches Wärmeleitungsproblem in einer Kugelschale mit konstanter Dichte. Durch die innere Begrenzungsfläche tritt ein gleichmäßiger Wärmestrom q in die Kugelschale ein ($r = R_o$). An der äußeren Begrenzungsfläche ($r = R$) wird die Wärme abgestrahlt, wobei das Stefan-Boltzmannsche Gesetz gelten soll.

Für unser Modell lautet die Wärmeleitungsgleichung (in Kugelkoordinaten)

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1+q_{\vartheta\vartheta}}{1+q_{rr}}\cdot\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial T}{\partial\vartheta}\right) = 0 \quad , \tag{107}$$

mit den Randbedingungen

$$-\lambda_e(1+q_{rr})\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=R_o} = q_o \quad , \quad q_o > 0 \quad , \tag{108a}$$

$$-\lambda_e(1+q_{rr})\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=R} = \sigma T^4(R,\vartheta) \quad , \tag{108b}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\vartheta}\Big|_{\vartheta=0} = 0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial\vartheta}\Big|_{\vartheta=\pi} = 0 \quad . \tag{108c}$$

Bei der Temperatur $T(r,\vartheta)$ ist hier der Mittelungsstrich weggelassen. σ ist die bekannte Konstante des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes.

Es werden folgende Normierungen und Abkürzungen eingeführt:

$$\varrho = r/R, \ (\varrho_o = R_o/R), \ \tau_o = \sqrt[4]{q_o/\sigma}, \quad \Theta = T/\tau_o\sqrt{\varrho_o} \tag{109a,b,c}$$

$$\chi = \frac{q_o R}{\tau_o\lambda_e}\sqrt{\varrho_o}(1-\varrho_o) = K\sqrt{\varrho_o}(1-\varrho_o) \ , \quad s = 4\frac{\sigma}{\lambda_e}\varrho_o^2\tau_o^4. \tag{109d,e}$$

Die normierte Temperatur $\Theta(\varrho,\vartheta)$ stellen wir als Summe aus dem nur von ϱ abhängigen Anteil $\Theta_o(\varrho)$ und dem Anteil $\Theta'(\varrho,\vartheta)$, der die schwache ϑ-Abhängigkeit enthält, dar:

$$\Theta(\varrho,\vartheta) = \Theta_o(\varrho) + \Theta'(\varrho,\vartheta) \quad . \tag{110}$$

Θ_o wird durch die Gleichung

$$\frac{d}{d\varrho}\varrho^2\frac{d\Theta_o}{d\varrho} = 0 \tag{111}$$

und die Randbedingungen

$$\left.\frac{d\theta_0}{d\rho}\right|_{\rho=\rho_0} = -\chi\frac{1}{\rho_0(1-\rho_0)} \quad , \quad \left.\frac{d\theta_0}{d\rho}\right|_{\rho=1} = -\theta_0^4\chi\frac{\rho_0}{1-\rho_0} \tag{112a,b}$$

bestimmt. Man erhält die Lösung

$$\theta_0(\rho) = 1 + \chi\frac{\rho_0}{\rho}\frac{(1-\rho)}{(1-\rho_0)} \quad , \tag{113}$$

für die an der äußeren Oberfläche der Kugelschale $\theta_0(1) = 1$ ist. Der Normierungsfaktor $\tau_0\sqrt{\rho_0} = \sqrt[4]{q_0/\sigma}\cdot\sqrt{\rho_0}$ stellt demzufolge die Oberflächentemperatur - jedenfalls einen mittleren Wert - dar. Die normierte Temperatur an der inneren Oberfläche der Kugelschale ist $\theta_0(\rho_0) = 1 + \chi$. χ ist also die normierte Temperaturdifferenz der beiden Grenzflächen. Für $\theta'(\rho,\vartheta)$ erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\theta'}{\partial\rho}\right) + \frac{1+q_{\vartheta\vartheta}}{1+q_{rr}}\cdot\frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\theta'}{\partial\vartheta}\right) = 0 \tag{114}$$

und die Randbedingungen

$$\left.\frac{\partial\theta'}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0} = -q_{rr}\cdot\left.\frac{d\theta_0}{d\rho}\right|_{\rho=\rho_0} = q_{rr}\frac{\chi}{\rho_0(1-\rho_0)} \quad , \tag{115a}$$

$$\left.\frac{\partial\theta'}{\partial\rho}\right|_{\rho=1} = -q_{rr}\cdot\left.\frac{d\theta_0}{d\rho}\right|_{\rho=1} - s\theta_0^3(1)\theta'(1,\vartheta) = q_{rr}\chi\frac{\rho_0}{1-\rho_0} - s\theta'(1,\vartheta) \quad , \tag{115b}$$

$$\left.\frac{\partial\theta'}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta=0} = \left.\frac{\partial\theta'}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta=\pi} = 0 \quad . \tag{115c}$$

Wegen der Ungleichung (106) werden in einer Kugelfläche nur kleine Temperaturunterschiede auftreten. Deshalb erwarten wir $|\theta'| \ll \theta_0$ und haben bei der Randbedingung (115b) $(\theta_0+\theta')^4 = \theta_0^4 + 4\theta_0^3\theta'$ gesetzt.

Die Lösung der Gleichung (114) kann nach räumlichen Kugelfunktionen entwickelt werden. Die Entwicklungskoeffizienten werden durch die Randbedingungen (115) bestimmt. Im Rahmen unserer Näherung nehmen wir eine lokal isotrope Temperaturleitfähigkeit an, d.h. wir setzen $q_{\vartheta\vartheta} = q_{rr}$. Damit lautet die Lösung der Gleichung (114)

$$\theta'(\rho,\vartheta) = c_0 + \frac{c_1}{\rho} + \left(\frac{c_2}{\rho^3} + c_3\rho^2\right)(3\cos^2\vartheta - 1) \quad . \tag{116a}$$

c_0, c_1, c_2 und c_3 sind die Integrationskonstanten. Nach deren

Bestimmung erhält man

$$\theta'(\varrho,\vartheta) = -\, q_{rr}^{(1)}\left[\frac{1}{4}+K\varrho_0\,(1-\varrho_0)\right] + \frac{1}{3}q_{rr}^{(2)}\cdot K\cdot\frac{\varrho_0^4}{K\varrho_0^2\left[\frac{4}{5}\varrho_0^5+2\right]+(1-\varrho_0^5)}\cdot$$
$$\cdot\left\{\left[2K\varrho_0^2+1-\varrho_0^3\right]\frac{1}{\varrho^3} - \left[2K\varrho_0^2+\frac{3}{2}\cdot\frac{(1-\varrho_0^2)}{\varrho_0^2}\right]\varrho^2 - (3\cos^2\vartheta-1)\right\}, \quad (116b)$$

χ ist für die Sonne von der Größenordnung 10^3 . Angaben über die Tiefe der Konvektionszone $h_0 = 1-\varrho_0$ schwanken zwischen 0,3 und 0,1 . Bilden wir die Differenz von $\theta(1,\vartheta)$ und $\theta(1,0)$ (Äquator) bei der Näherung $K \gg 1$ (aus $\chi \gg 1$), die gut erfüllt ist, und $h_0 \ll 1$, so erhalten wir

$$\theta(1,\vartheta) - \theta(1,0) = -\cos^2\vartheta\,\frac{75}{28}\,q_{rr}^{(2)}\,h_0^2\left[1-\frac{58}{21}h_0+\frac{258}{147}h_0^2+\dots\right]. \quad (117)$$

Da $q_{rr}^{(2)}$ ein normiertes Maß für den Unterschied der Turbulenzintensität zwischen Äquator und Pol darstellt, nach dem angegebenen Meßwert von 6% ist $q_{rr}^{(2)} = -\,0{,}063$, ist die sich ergebende Temperaturdifferenz auf Grund ihrer quadratischen Abhängigkeit von h im führenden Glied wesentlich kleiner.
Die Pol-Äquator-Differenz ist für $q_{rr}^{(2)} = -\,0{,}063$ und dem ungünstigen Wert $h_0 = 0{,}3$, $\Delta T/T = 5\cdot 10^{-3}$, ein Wert, der nicht zu messen ist. Für $h_0 = 0{,}1$ erhält man $\Delta T/T = 0{,}95\cdot 10^{-3}$. Genauere Rechnungen dürften Werte der gleichen Größenordnung ergeben. Somit ist eine mögliche Erklärung des nicht beobachteten Temperaturunterschiedes zwischen Pol und Äquator gegeben.

Anhang

Für weiterführende Rechnungen werden einige bereits verwendete, aber nicht angegebene Ausdrücke für die Koeffizienten a,... angegeben. Sie gelten für schwach inhomogene Turbulenz.

$$a = (\gamma-1)\iint \frac{k_i}{\omega}\left(ik_i + \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \hat{Q}^*_{ij}\, d^3k\, d\omega + (\gamma-1)\iint\Big[(\gamma-1)\hat{G}k_i k_j +$$

$$+ i(\hat{G}k_i\delta_{\ell j} - (\gamma-1)\hat{G}k_j\delta_{\ell i} - (\gamma-1)k_i k_j k_\ell \hat{G}'/k)\frac{\partial}{\partial x_\ell}\Big]\hat{Q}^*_{ij}\, d^3k\, d\omega\,, \tag{A1}$$

$$a_n = \iint\Big[\delta_{nj}\frac{1}{\omega}\left(k_i - i\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\hat{Q}^*_{ij}\, d^3k\, d\omega - \iint\Big\{ i\hat{G}(\gamma-1)(\delta_{nj}k_i - \delta_{ni}k_j) +$$

$$-i(\gamma-1)^2 k_i k_j k_n \hat{G}'/k + \Big[\hat{G}\delta_{in}\delta_{\ell j} + (\gamma-1)\hat{G}\delta_{i\ell}\delta_{jn} + \hat{G}'/k\cdot$$

$$\cdot(\delta_{nj}k_i k_\ell + (\gamma-1)\delta_{\ell j}k_i k_n - (\gamma-1)\delta_{ni}k_\ell k_j - (\gamma-1)^2\delta_{\ell i}k_j k_n -$$

$$-(\gamma-1)^2\delta_{n\ell}k_i k_j) - (\gamma-1)^2 k_n k_\ell k_i k_j (\hat{G}'/k)'/k\Big]\frac{\partial}{\partial x_\ell}\Big\}\hat{Q}^*_{ij}\, d^3k\, d\omega\,, \tag{A2}$$

$$a_{nn} = \iint\Big\{\Big\langle \hat{G}\delta_{ni}\delta_{nj} + \hat{G}'/k\Big[-(\gamma-1)\delta_{ni}k_j k_n - \frac{1}{2}(\gamma-1)^2\delta_{nn}k_i k_j +$$

$$+\frac{1}{2}(\gamma-1)\delta_{nj}k_n k_i + \frac{1}{2}(\gamma-1)\delta_{nj}k_n k_i - (\hat{G}'/k)'/k\cdot(\gamma-1)^2 k_n k_n k_i k_j\Big\rangle +$$

$$+\Big\langle\hat{G}'/k\Big[-i\delta_{ni}\delta_{\ell j}k_n - i\delta_{ni}\delta_{nj}k_\ell + i(\gamma-1)\delta_{ni}\delta_{n\ell}k_j - i\frac{1}{2}(\gamma-1)\delta_{\ell i}\delta_{nj}k_n -$$

$$-i\frac{1}{2}(\gamma-1)\delta_{\ell i}\delta_{nj}k_n + i\frac{1}{2}(\gamma-1)^2\delta_{\ell i}\delta_{nn}k_j - i\frac{1}{2}(\gamma-1)\delta_{nj}\delta_{n\ell}k_i -$$

$$-i\frac{1}{2}(\gamma-1)\delta_{n\ell}\delta_{nj}k_i - i\frac{1}{2}(\gamma-1)\delta_{nn}\delta_{\ell j}k_i\Big] +$$

$$+(\hat{G}'/k)'/k\Big[i(\gamma-1)\delta_{ni}k_n k_\ell k_j + i\frac{1}{2}(\gamma-1)^2\delta_{\ell i}k_n k_n k_j +$$

$$+i\frac{1}{2}(\gamma-1)^2\delta_{n\ell}k_n k_i k_j + i\frac{1}{2}(\gamma-1)^2\delta_{n\ell}k_n k_i k_j - i\frac{1}{2}(\gamma-1)\delta_{\ell j}k_n k_n k_i +$$

$$+i\frac{1}{2}(\gamma-1)^2\delta_{nn}k_\ell k_i k_j - i\frac{1}{2}(\gamma-1)\delta_{ni}k_n k_\ell k_i\Big] +$$

$$+i\frac{1}{2}(\gamma-1)^2((\hat{G}'/k)'/k)'/k\cdot k_n k_n k_\ell k_i k_j\Big\rangle\frac{\partial}{\partial x_\ell}\Big\}\hat{Q}^*_{ij}\, d^3k\, d\omega\,, \tag{A3}$$

$$b = (\gamma-1)\iint\Big\{\Big\langle -ik_i k_j\,(\hat{G}/\omega + (\gamma-1)\hat{G}^{\circ})\Big\rangle + \Big\langle -\hat{G}\,\delta_{il}\,k_j/\omega + \hat{G}^{\circ}(\delta_{jl}\,k_i - (\gamma-1)\,\delta_{il}k_j) -$$

$$-\hat{G}'/k\cdot k_n k_i k_j\cdot\omega - \hat{G}^{\circ\prime}/k\cdot(\gamma-1)\,k_n k_i k_j\Big\rangle \frac{\partial}{\partial x_l}\Big\}\,\hat{Q}^{*}_{ij}\,d^3k\,d\omega\,, \qquad (A4)$$

$$b_k = \iint\Big\{\Big\langle \hat{G}\,\delta_{ki}\,k_j/\omega + (\gamma-1)\hat{G}^{\circ}(\delta_{ki}\,k_j - \delta_{kj}\,k_i) + \overset{(\gamma-1)}{\hat{G}'}/k\cdot k_k k_i k_j/\omega +$$

$$+(\gamma-1)^2\,\hat{G}^{\circ\prime}/k\cdot k_k k_i k_j\Big\rangle + \Big\langle i\hat{G}^{\circ}(\delta_{ki}\,\delta_{lj} + (\gamma-1)\,\delta_{li}\,\delta_{kj}) - i\hat{G}'/k\cdot\frac{1}{\omega}\cdot$$

$$\cdot(\delta_{ki}\,k_l k_j + (\gamma-1)\,\delta_{kl}\,k_i k_j + (\gamma-1)\,\delta_{li}\,k_k k_j) - i(\gamma-1)(\hat{G}'/k)'/k\cdot k_k k_l k_i k_j/$$

$$/\omega +$$

$$-i(\gamma-1)\hat{G}^{\circ\prime}/k\cdot(\delta_{ki}\,k_l k_j - \delta_{kj}\,k_l k_i - \delta_{lj}\,k_k k_i + (\gamma-1)\,\delta_{il}\,k_k k_j + (\gamma-1)\,\delta_{kl}\,k_i k_j)$$

$$-i(\gamma-1)^2\,(\hat{G}^{\circ\prime}/k)'/k\cdot k_k k_l k_i k_j\Big\rangle \frac{\partial}{\partial x_l}\,\hat{Q}^{*}_{ij}\,d^3k\,d\omega\,, \qquad (A5)$$

Nun geben wir einige Koeffizienten an, die unter Berücksichtigung einer schwachen Ortsabhängigkeit der mittleren Dichte abgeleitet wurden.

$$a = (\gamma-1)^2\iint\hat{G}k_i k_j\,\hat{Q}^{*}_{ij}\,d^3k\,d\omega + (\gamma-1)\iint\frac{i}{\omega}\,k_i k_j\,\hat{Q}^{*}_{ij}\,d^3k\,d\omega +$$

$$+(\gamma-1)\,\frac{\rho_m}{\rho_0}\iint\Big\{\frac{1}{\omega}\,\delta_{im}\,k_j + 2i\hat{G}\,\delta_{jm}\,k_i - \hat{G}^2\omega\,\delta_{jm}k_i - i(\gamma-1)\,\hat{G}'/k\cdot k_m k_i k_j\Big\}\,\hat{Q}^{*}_{ij}\,d^3k\,d\omega \qquad (A6)$$

$$a_n = \delta_{nj}\iint\frac{1}{\omega}\Big[k_i - i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big]\hat{Q}^{*}_{ij}\,d^3k\,d\omega + \iint\Big\{i\hat{G}(\gamma-1)(\delta_{in}\,k_j - \delta_{jn}\,k_i) +$$

$$+i(\gamma-1)^2\,\hat{G}'/k\cdot k_n k_i k_j\Big\}\,\hat{Q}^{*}_{ij}\,d^3k\,d\omega +$$

$$-\frac{\rho_e}{\rho_0}\iint\Big\{\hat{G}\,\delta_{in}\,\delta_{lj} + (\gamma-1)\,\hat{G}'/k\Big[2\delta_{lj}\,k_n k_i + \delta_{nj}\,k_l\,k_i - \delta_{ni}\,k_l k_j - (\gamma-1)\,\delta_{nl}k_i k_j\Big] -$$

$$-(\gamma-1)^2\,(\hat{G}'/k)'/k\cdot k_l k_n k_i k_j + i\hat{G}^2\omega\,\delta_{in}\,\delta_{lj} + i(\gamma-1)\,\hat{G}\hat{G}'/k\cdot\omega\cdot$$

$$\cdot\Big[2\,\delta_{lj}\,k_n k_i + \delta_{nj}\,k_l k_i - \delta_{ni}\,k_l k_j - (\gamma-1)\,\delta_{nl}\,k_i k_j - i(\gamma-1)^2\,(\hat{G}'/k)^2\cdot$$

$$k_n\cdot k_l\cdot k_i\cdot k_j\ -$$

$$-i(\gamma-1)^2\,\hat{G}(\hat{G}'/k)'/k\cdot\omega\cdot k_n k_l k_i k_j\Big\}\cdot\hat{Q}^{*}_{ij}\,d^3k\,d\omega\,, \qquad (A7)$$

$$
\begin{aligned}
a_{kn} = -\iint \Big\{ & -\hat{G}\delta_{ni}\delta_{nj} + \hat{G}'/k\Big[(\gamma-1)\delta_{ni}\, k_n k_j - \tfrac{1}{2}(\gamma-1)\big[\delta_{nj}\, k_n k_i + \delta_{nj}\, k_n k_i\big) + \\
& + \tfrac{1}{2}(\gamma-1)\delta_{un}\, k_i k_j + \frac{\rho_e}{\rho_0}\big(i\,\delta_{ej}\delta_{ni}\, k_n + i\,\delta_{ni}\delta_{nj}\, k_e + i\,\delta_{ei}\delta_{nj}\, k_n - \\
& - i(\gamma-1)\delta_{ne}\delta_{ni}\, k_j + i\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\delta_{ej}\delta_{un}\, k_i + i\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\delta_{en}\delta_{nj}\, k_i + i\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\delta_{ei}\delta_{un}\, k_j + \\
& + \tfrac{1}{2}(\gamma-1)\delta_{ne}\delta_{nj}\, k_i\Big] + \\
& + (\hat{G}'/k)'/k\cdot\Big[\tfrac{1}{2}(\gamma-1)^2\, k_u k_n k_i k_j + \frac{\rho_e}{\rho_0}\big(-i(\gamma-1)\delta_{ni}\, k_n k_e k_j + \\
& + i\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\,\delta_{ej}\, k_u k_n k_i - i\tfrac{1}{2}(\gamma-1)k_e\,\delta_{un} k_i k_j - i\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\delta_{ne}\, k_n k_i k_j + \\
& + i\tfrac{1}{2}(\gamma-1)k_e\,\delta_{nj}\, k_n k_i - i\tfrac{1}{2}(\gamma-1)^2\,\delta_{ne}\, k_u k_i k_j + i\tfrac{1}{2}(\gamma-1)k_e\,\delta_{nj}\, k_u k_i + \\
& + i\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\,\delta_{ej}\, k_u k_n k_i\big) + \\
& + (\hat{G}'/k)'/k\Big[-i\tfrac{1}{2}(\gamma-1)^2\frac{\rho_e}{\rho_0}\, k_e k_u k_n k_i k_j\Big] + \\
& + \omega\hat{G}(\hat{G}'/k)\frac{\rho_e}{\rho_0}\Big[-k_e\delta_{ni}\delta_{nj} - 2\,\delta_{ej}\delta_{ni}\, k_n + (\gamma-1)\,\delta_{ne}\delta_{ni} k_j + (\gamma-1)k_e\delta_{ni}\, k_n k_j - \\
& - (\gamma-1)\delta_{ej}\delta_{un} k_i - \tfrac{1}{2}(\gamma-1)\delta_{ne}\delta_{nj}\, k_i - \tfrac{1}{2}(\gamma-1)\delta_{ne}\delta_{nj}\, k_i\Big] + \\
& + (\gamma-1)\omega(\hat{G}'/k)^2\frac{\rho_e}{\rho_0}\Big[\delta_{ni}\, k_e k_n k_j - \delta_{ej}\, k_u k_n k_i - \tfrac{1}{2}\,\delta_{un} k_e k_i k_j - \\
& - \tfrac{1}{2}\,\delta_{nj}\, k_e k_u k_i + \tfrac{1}{2}(\gamma-1)\,\delta_{ne}\, k_n k_i k_j + \tfrac{1}{2}(\gamma-1)\,\delta_{un} k_e k_i k_j\Big] + \\
& + (\gamma-1)\,\omega\,\hat{G}(\hat{G}'/k)'/k\cdot\Big[\delta_{ni}\, k_n k_e k_j - \delta_{ej}\, k_u k_n k_i + \tfrac{1}{2}\,\delta_{un} k_e k_i k_j - \\
& - \tfrac{1}{2}\,\delta_{nj}\, k_e k_n k_i - \tfrac{1}{2}\,\delta_{nj}\, k_e k_n k_i + \tfrac{1}{2}(\gamma-1)\,\delta_{ne} k_u k_i k_j\Big]\frac{\rho_e}{\rho_0} + \\
& + \tfrac{1}{2}(\gamma-1)^2\omega\,\hat{G}((\hat{G}'/k)'/k)'/k)\frac{\rho_e}{\rho_0} k_e k_u k_n k_i k_j + \\
& + (\gamma-1)^2\omega(\hat{G}'/k)((\hat{G}'/k)'/k)\frac{\rho_e}{\rho_0} k_e k_u k_n k_i k_j\Big]\,\hat{Q}^{*}_{ij}\, d^3\mathbf{k}\, d\omega \quad . \qquad (A8)
\end{aligned}
$$

Man muß davon ausgehen, daß für $\partial\bar{\varrho}/\partial x_n \neq 0$ die Spektraltensoren ebenfalls vom Dichtegradienten abhängen. Für einen kleinen Dichtegradienten, d.h. $|\partial\bar{\varrho}/\partial x_n|\cdot l_v \ll \varrho_0$, geben wir folgenden Spektraltensor an:

$$\begin{aligned}\hat{Q}_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{k};\omega) = {} & (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2})(\hat{A}+\hat{A}_n\bar{\varrho}) + (\bar{\varrho}_{in} k_n)\Big[(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2})\cdot \\ & \cdot(\hat{D}+\frac{i}{2k}\hat{A}') + i\hat{A}_n k_n k_j/k^4\Big] - i\hat{A}_n \varrho_{ij} k_i/k^2 + \\ & + \frac{k_i k_j}{k^2}(\hat{F}+\hat{F}_n\bar{\varrho}) + (\bar{\varrho}_{in} k_n)\frac{k_i k_j}{k^2}(\hat{H}+ik(\hat{F}_n/k^2)') + \\ & + i\hat{F}_n\bar{\varrho}_{in} k_j/k + \\ & + i\hat{C}_n \varepsilon_{ijn}\bar{\varrho}_{in} + (\varrho_i k_j + \varrho_j k_i)\cdot\hat{C}_2 \quad ; \end{aligned} \tag{A9}$$

Die Korrelationsfunktionen $\hat{A}$, $\hat{A}_n$, $\hat{D}$ beschreiben das Wirbelfeld, $\hat{F}$, $\hat{F}_n$, $\hat{H}$ das Potentialfeld und $\hat{C}_n$, $\hat{C}_2$ die Korrelation des Wirbelfeldes mit dem Potentialfeld. $\hat{A}$, $\hat{A}_n$, $\hat{F}$, $\hat{F}_n$ sind symmetrisch in ω, $\hat{H}$, $\hat{D}$, $\hat{C}$, $\hat{C}_n$ antisymmetrisch.

Literatur

1. C. Chiuderi, I. Riani, Solar Physics, 34, 113-124,(1974)
2. K. O. Eschrich, Astron. Nachrichten, 299, H. 3, (1978)
3. F. Krause, K.H. Rädler, in Ergebnisse der Plasmaphysik und Gaselektronik, Bd. 11, Hrsg. R. Rompe und M. Steenbeck, Akademie-Verlag, Berlin, (1971)
4. F. Krause, Astron. Nachrichten, 294, H.1-2, 83-87, (1972)
5. F. Krause, G. Rüdiger, Astron. Nachrichten, 295, H.2, 93-99, H.4, 185-193, (1974)
6. L. Prandtl, Strömungslehre, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig (1956), 113-114
7. G. Rüdiger, Astron. Nachrichten, 295, H.5, 229-235, (1974)
8. A. Unsöld, Physik der Sternatmosphären, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, (1955), 218ff, 555ff
9. A. Unsöld, Zeitschrift für Astrophysik, 50, 57-68, (1960)
10. K.-H. Rädler, Astron. Nachr., 295, H.2, 85-92 (1974)
11. M. Butz, W. Hirth, E. Fürst, Kleinheubacher Berichte 20 1-5, (1977)

Nachdem wesentliche Ergebnisse, die hier dargestellt sind, vorlagen, wurde in der Arbeitsgruppe darüber diskutiert. Einige Anregungen und Hinweise erhielt ich von meinem Betreuer Dr. Rädler. Prof. Krause darauf, zu untersuchen, ob durch Turbulenz eine Verminderung der mittleren effektiven Temperaturleitfähigkeit erreicht werden kann. Dafür und für das Interesse, das meiner Arbeit entgegengebracht wurde, welches andererseits meine Freude an ihr wachsen ließ, danke ich allen, aber besonders Dr. Rädler herzlich.
Herrn Zange danke ich für einige numerische Rechnungen.

Ich versichere, die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Benutzung der angegebenen Literatur angefertigt zu haben. Diese Arbeit wurde keiner anderen Stelle zur Begutachtung vorgelegt, einige Ergebnisse wurden bereits veröffentlicht.

Potsdam, den 31. Januar 1978

Karl-Otto Eschrich